



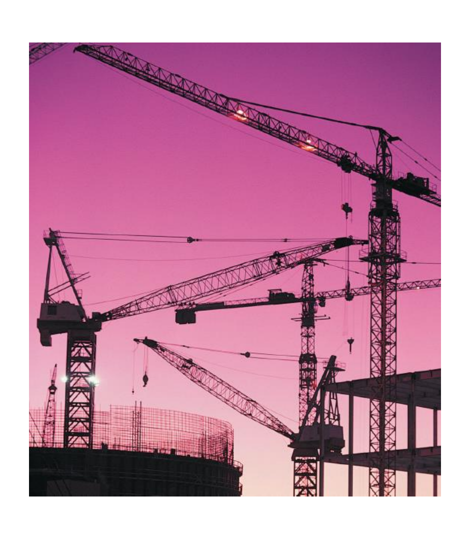
PROBLEMAS RESUELTOS DE

MECÁNICA VECTORIAL (ESTÁTICA).

PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA, CIENCIA Y TECNOLOGÍA.

CAPÍTULO 1: ESTÁTICA DE PARTÍCULAS.

FUERZAS EN EL ESPACIO.



Ing. Willians Medina.

Maturín, marzo de 2022.

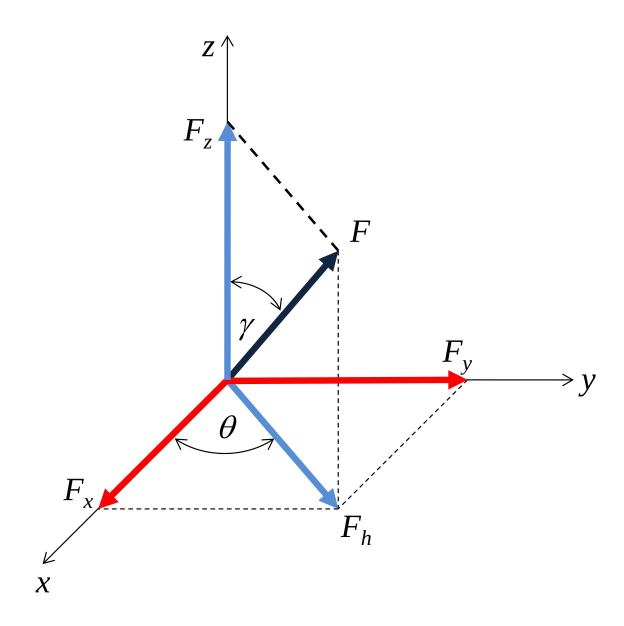
CONTENIDO.

A continuación encontrarás los fundamentos teóricos, algunos ejemplos resueltos paso a paso así como una serie de ejercicios que se encuentran resueltos en www.tutoruniversitario.com/. Puedes dar click donde dice "VER SOLUCIÓN" e irás directamente al lugar donde se encuentra el ejercicio resuelto en nuestro site.

1.3.- FUERZAS EN EL ESPACIO.

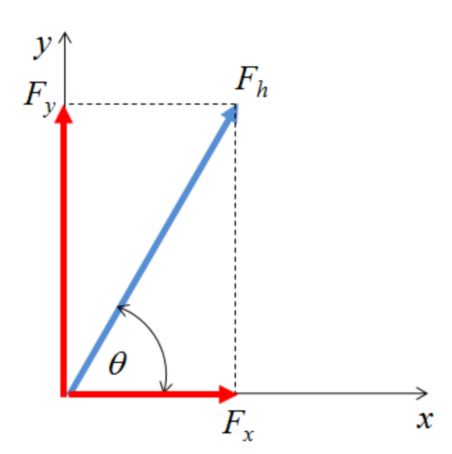
Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio.

Considere una fuerza *F* que actúa en el origen O del sistema de coordenadas rectangulares *x*, *y*, *z*.



La fuerza puede descomponerse en una componente vertical F_z y una componente horizontal F_h mostradas en la figura. Las componentes rectangulares correspondientes son $F_z = F\cos\gamma$ y $F_h = F\,\text{sen}\,\gamma$.

La fuerza F_h puede descomponerse en sus dos componentes rectangulares:



$F_x = F_h \cos\theta = F \operatorname{sen}\gamma \cos\theta$ y $F_y = F_h \operatorname{sen}\theta = F \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\theta$ a lo largo de los ejes *x* y *y*, respectivamente. Esta operación, mostrada en la figura, se realiza en el plano *x y*.

De esta manera se obtienen las expresiones siguientes para las componentes escalares correspondientes:

$$F_x = F_h \cos\theta = F \operatorname{sen}\gamma \cos\theta$$

$$F_y = F_h \operatorname{sen}\theta = F \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\theta$$

$$F_z = F \cos\gamma$$

La fuerza *F* se ha descompuestos en tres componentes vectoriales rectangulares F_x, F_y y F_z, dirigidas a lo largo de los tres ejes coordenados.

Representación de un vector cartesiano.

Con el uso de los vectores unitarios *i*, *j* y *k*, dirigidos a lo largo de los ejes *x*, *y* y *z*, respectivamente, se puede expresar *F* en forma cartesiana

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

Donde las componentes rectangulares F_x, F_y y F_z están definidas por las relaciones indicadas anteriormente.

Magnitud o Módulo de la fuerza.

Si se combinan las tres ecuaciones y se resuelve para *F* se obtiene la siguiente relación entre la magnitud de *F* y sus componentes rectangulares escalares.

$$\| F \| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Por consiguiente, la magnitud de F es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus componentes.

Vector unitario.

El vector unitario en la dirección de la fuerza está dado por:

$$u_F = \frac{F}{\| F \|}$$

$$u_F = \frac{F_x i + F_y j + F_z k}{\| F \|}$$

$$u_F = \frac{F_x}{\| F \|} i + \frac{F_y}{\| F \|} j + \frac{F_z}{\| F \|} k$$

Ejemplo 1.46. Guía de Ejercicios. Prof. Jacqueline Balza. UDOA.

Dado el vector $F = -3\ i + 5\ j - 2\ k$, hallar un vector unitario en la dirección de F.

Solución.

Vector unitario.

$$u_F = \frac{F}{\| F \|}$$

Módulo del vector F.

$$\| F \| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\| F \| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (-2)^2}$$

$$\| F \| = \sqrt{9 + 25 + 4}$$

$$\| F \| = \sqrt{38}$$

$$\| F \| = 6.1644$$

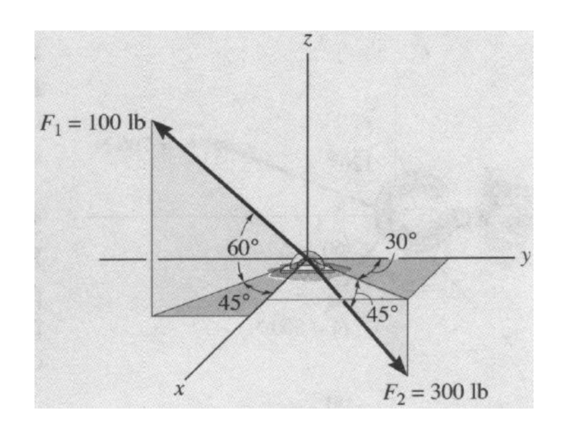
Vector unitario.

$$u_F = \frac{-3i + 5j - 2k}{6.1644}$$

$u_F = -\ 0.4867\ i + 0.8111\ j - 0.3244\ k$

Ejemplo 1.47. Ejemplo 2.10 del Hibbeler. Décima Edición. Página 49. Ejemplo 2.10 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 49.

Exprese las fuerzas F_1 y F_2 mostradas en la figura como un vector cartesiano.



Solución.

Las componentes rectangulares de la fuerza F_1 son:

F_{1x} = 100 cos 60° cos 45° = 35.35 lb

F_{1y} = –100 cos 60° sen 45° = –35.35 lb

F_{1z} = 100 sen 60° = 86.68 lb

Fuerza F_1 expresada como un vector cartesiano:

F_1 = (35.35 *i* – 35.35 *j* + 86.60 *k*) lb

Las componentes rectangulares de la fuerza F_2 son:

F_{2x} = 300 cos 45° sen 30° = 106.06 lb

F_{2y} = 300 cos 45° cos 30° = 183.71 lb

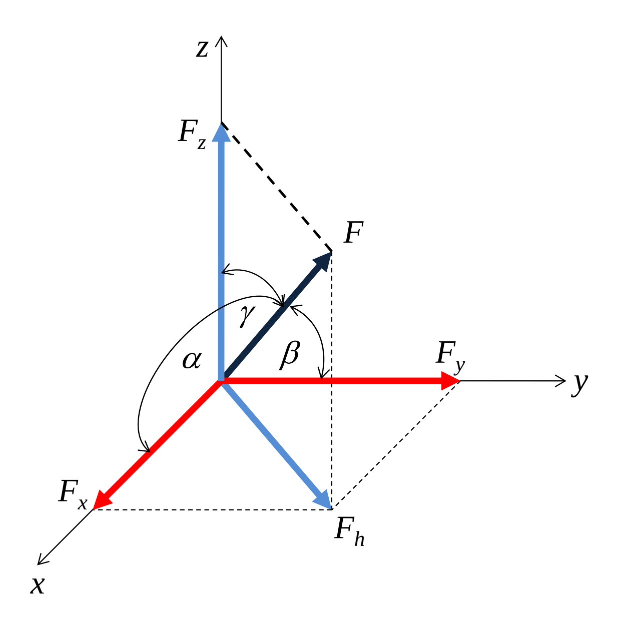
F_{2z} = –300 sen 45° = –212.13 lb

Fuerza F_2 expresada como un vector cartesiano:

F_2 = (106.06 *i* + 183.71 *j* – 212.13 *k*) lb

Ángulos directores de una fuerza.

Considere una fuerza *F* que actúa en el origen O del sistema de coordenadas rectangulares *x*, *y*, *z*.



Si representamos por α, β y γ los ángulos que forma F con los ejes x, y y z, respectivamente, entonces se escribe

$$F_x = F\cos\alpha$$

$$F_y = F\cos\beta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$

Dirección de la fuerza.

Los tres ángulos α, β y γ definen la dirección de la fuerza F y son más usados que los ángulos θ y ϕ. Los cosenos de α, β y γ se conocen como los *cosenos directores* de la fuerza F. De las ecuaciones anteriores se tiene para los cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

Y para los ángulos directores:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{F_x}{F}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{F_y}{F}\right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{F_z}{F}\right)$$

El vector u_F es un vector unitario que tiene la misma dirección que la fuerza F. Por definición:

$$u_F = \frac{F_x}{\| F \|} i + \frac{F_y}{\| F \|} j + \frac{F_z}{\| F \|} k$$

Por comparación con las ecuaciones de los cosenos directores, se ve que las componentes del vector unitario representan los cosenos directores de F, esto es,

$$u_F = (\cos\alpha)\, i + (\cos\beta)\, j + (\cos\gamma)\, k$$

Como la magnitud de un vector es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las magnitudes de sus componentes, y u_F tiene una magnitud de 1, puede formularse entonces una importante relación entre los cosenos directores como

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Si el vector F se encuentra en un octante conocido, esta ecuación puede usarse para determinar uno de los ángulos coordenados de dirección si los otros dos son conocidos.

Ejemplo 1.48. Ejemplo 2 del Beer – Johnston. Estática. Página 39.

Una fuerza F tiene las componentes $F_x = 20\text{ lb}$, $F_y = -30\text{ lb}$ y $F_z = 60\text{ lb}$. Determine la magnitud de F y los ángulos α, β y γ que forma con los ejes coordenados.

Solución.

Fuerza.

$F = 20\, i - 30\, j + 60\, k$

Magnitud de la fuerza.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F = \sqrt{(20)^2 + (-30)^2 + (60)^2}$$

$$F = \sqrt{400 + 900 + 3600}$$

$$F = \sqrt{4900}$$

$$F = 70 \text{ lb}$$

Ángulos directores.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{F_x}{F}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{20}{70}\right) = 73.40°$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{F_x}{F}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{20}{70}\right) = 73.40°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{F_y}{F}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-30}{70}\right) = 115.38°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{F_z}{F}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{60}{70}\right) = 31.00°$$

Ejemplo 1.49. Ejemplo 2 del Beer – Johnston. Estática. Página 39.

Una fuerza de 500 N forma ángulos de 60°, 45° y 120° con los ejes x, y y z, respectivamente. Encuentre las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza. Escribir F como un vector cartesiano.

Solución.

Conocida la magnitud de la fuerza y sus ángulos directores, las componentes están dadas por:

$$F_x = F\cos\alpha = 500 \text{ N} \times \cos 60° = 250 \text{ N}$$

$$F_y = F\cos\beta = 500 \text{ N} \times \cos 45° = 353.55 \text{ N}$$

$$F_z = F\cos\gamma = 500 \text{ N} \times \cos 120° = -250 \text{ N}$$

Vector F escrito como un vector cartesiano.

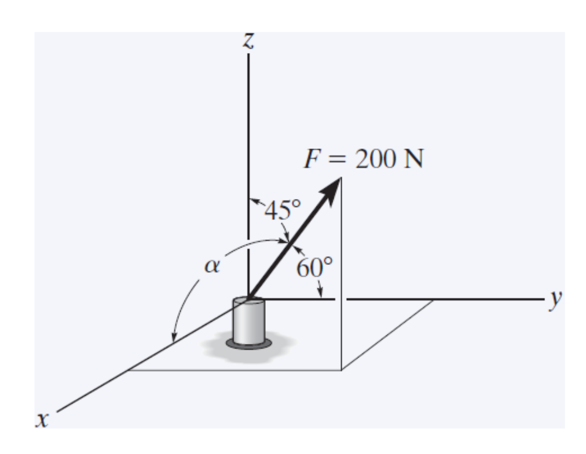
F = (250 N) *i* + (453.15 N) *j* – (250 N) *k*

ó

F = (250 *i* + 453.15 *j* – 250 *k*) N

Ejemplo 1.50. Ejemplo 2.8 del Hibbeler. Décima Edición. Página 47. Ejemplo 2.8 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 47.

Exprese la fuerza *F* mostrada como un vector cartesiano.



Solución.

La fuerza *F*, expresada como un vector cartesiano, se escribe:

$$F = \|F\|(\cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k)$$

Puesto que sólo se conocen dos de los ángulos directores, $\beta = 60°$ y $\gamma = 45°$, es posible conocer $\cos\beta$ y $\cos\gamma$. Adicionalmente se requiere determinar el valor de $\cos\alpha$, el cual puede ser determinado mediante la ecuación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Al despejar $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 60° - \cos^2 45°}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - 0.25 - 0.5}$$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{0.25}$

$\cos\alpha = \pm 0.5$

Puesto que la componente *x* del vector *F* es positiva, entonces $\cos\alpha = 0.5$.

Vector *F*.

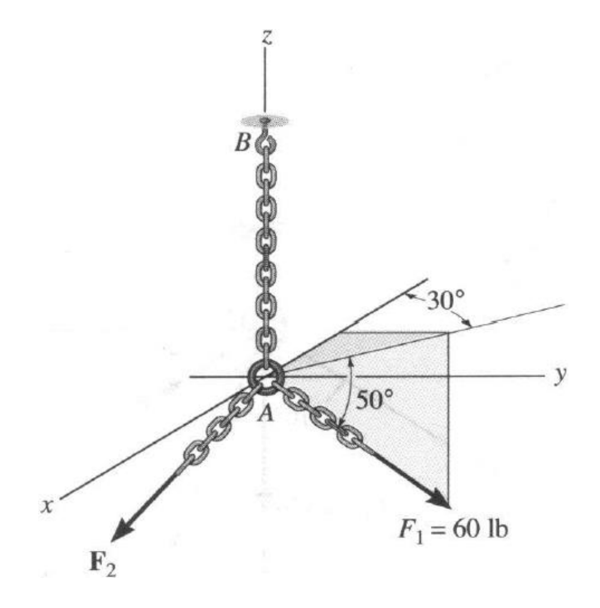
F = 200 N (0.5 *i* + cos 60° *j* + cos 45° *k*)

F = 200 N (0.5 *i* + 0.5 *j* + 0.7071 *k*)

F = (100 *i* + 100 *j* + 141.42 *k*) N

Ejemplo 1.51. Problema 2.72 del Hibbeler. Décima Edición. Página 53.

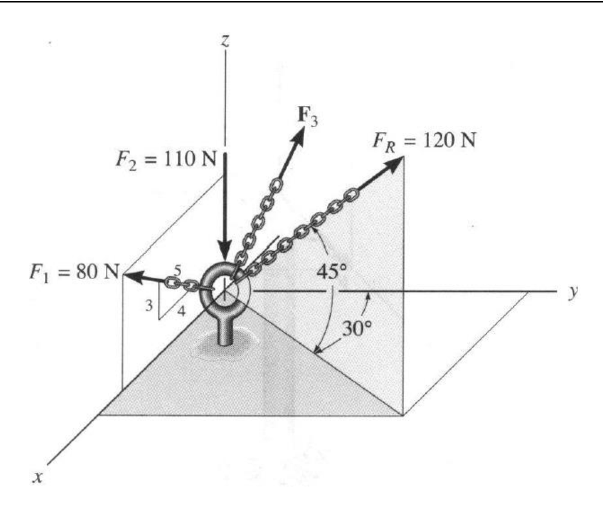
Determine los ángulos coordenados de dirección de la fuerza F_1.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.52. Problema 2.78 del Hibbeler. Décima Edición. Página 54.

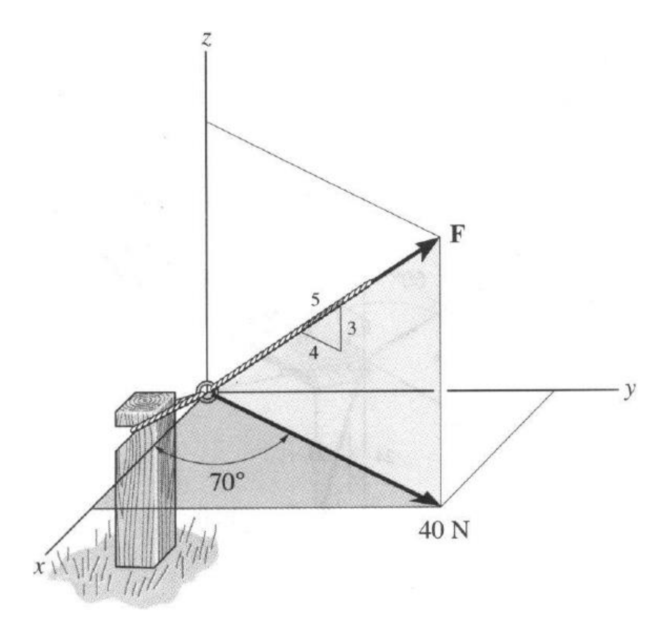
Determine los ángulos directores coordenados de F_1 y F_R.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.53. Problema 2.61 del Hibbeler. Décima Edición. Página 51.

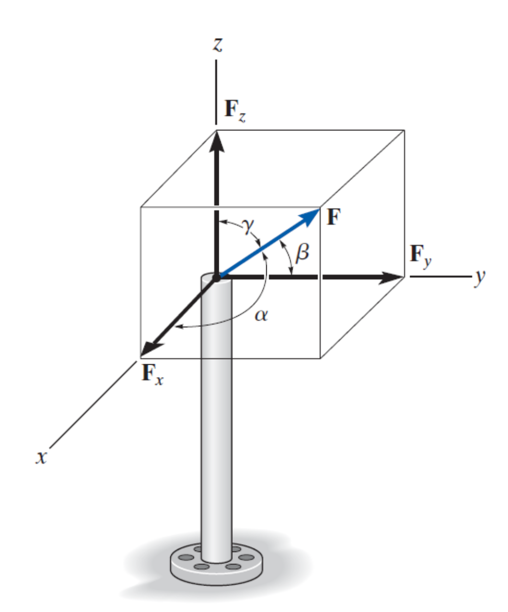
Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza F que actúa sobre la estaca.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.54. Problema 2.82 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 55.

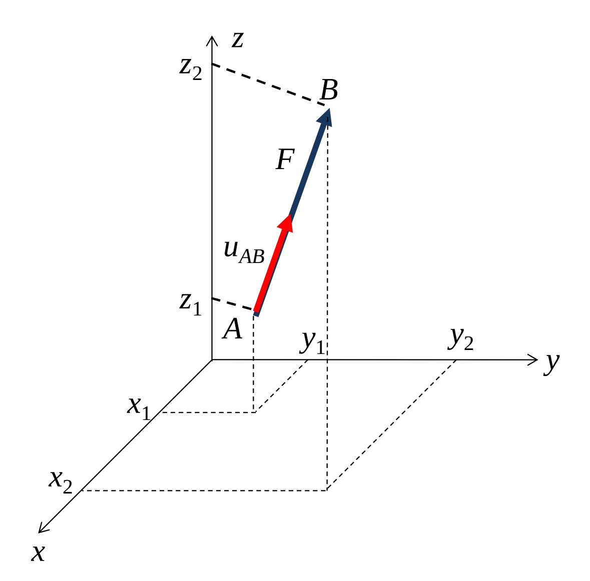
El poste está sometido a la fuerza F, la cual tiene componentes $F_x = 1.5$ kN y $F_z = 1.25$ kN. Si $\beta = 75°$, determine las magnitudes de F y F_y.



VER SOLUCIÓN.

Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción.

En muchas aplicaciones la dirección de una fuerza F está definida por las coordenadas de dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, localizadas sobre su línea de acción.



Si un vector *AB* se representa por medio del segmento orientado que va del punto *A* (x_1 , y_1 , z_1) al *B* (x_2 , y_2 , z_2), entonces la expresión en componentes de *AB* es $AB = a_x\, i + a_y\, j + a_z\, k$, siendo $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$ y $a_z = z_2 - z_1$.

$AB = (x_2 - x_1)\, i + (y_2 - y_1)\, j + (z_2 - z_1)\, k$

Un vector escrito en componentes también se denomina **vector cartesiano**.

Si $\| F \|$ es el módulo de la fuerza y u_{AB} es un vector unitario de la dirección de la fuerza, entonces el vector fuerza (*F*) es igual al producto de $\| F \|$ y u_{AB}:

$$F = \| F \| u_{AB}$$

El vector unitario en la dirección de la fuerza está dado por:

$$u_{AB} = \frac{AB}{\| AB \|}$$

$$u_{AB} = \frac{(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)i + (z_2 - z_1)i}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

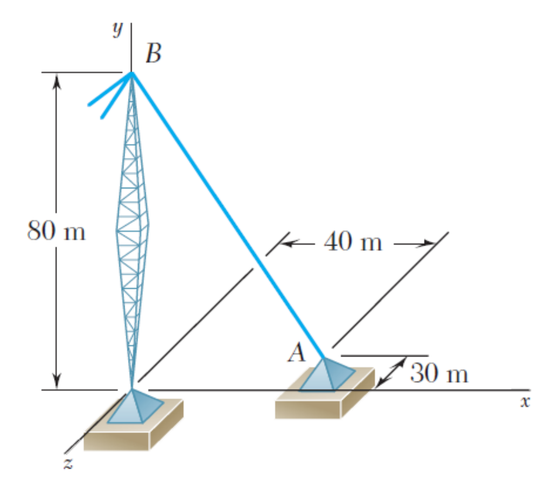
Ejemplo 1.55. Guía de Ejercicios. Prof. Jacqueline Balza. UDOA.

Expresar en función de los vectores unitarios *i*, *j*, *k* la fuerza de 200 N que parte del punto *C* (2, 5, –3) y pasa por el punto *D* (–3, 2, 1).

VER SOLUCIÓN.

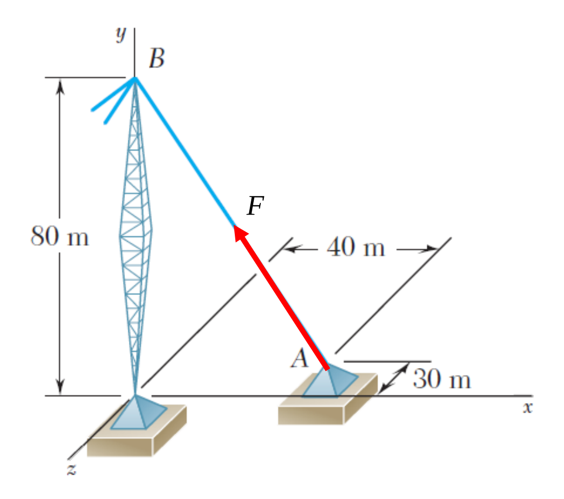
Ejemplo 1.56. Problema resuelto 2.7 del Beer – Johnston. Novena Edición. Página 50. Problema resuelto 2.7 del Beer – Johnston. Décima Edición. Página 42.

El alambre de una torre está anclado en *A* por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2500 N. Determine: a) las componentes F_x, F_y, F_z de la fuerza que actúa sobre el perno, y b) los ángulos α, β y γ, que definen la dirección de la fuerza.



Solución.

En la figura siguiente se muestra el vector fuerza dirigido desde el punto A hacia el punto B.



Fuerza.

$F_{AB} = \| F \| u_{AB}$

u_{AB}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto *A*: *A* (40 , 0 , –30)

Coordenadas del punto *B*: *B* (0 , 80 , 0)

Vector AB.

$AB = (0 - 40)\, i + (80 - 0)\, j + [0 - (-30)]\, k$

$AB = -40\, i + 80\, j + 30\, k$

Módulo del vector *AB*:

$\| AB \| = \sqrt{(-40)^2 + (80)^2 + (30)^2}$

$\| AB \| = \sqrt{1600 + 6400 + 900}$

$\| AB \| = \sqrt{8900}$

$\| AB \| = 94.34$

$$u_{AB} = \frac{-40\, i + 80\, j + 30\, k}{94.34}$$

$u_{AB} = -0.4240\, i + 0.8480\, j + 0.3180\, k$

$F_{AB} = 2500\, (-0.4240\, i + 0.8480\, j + 0.3180\, k)$

$F_{AB} = (-1060\, i + 2120\, j + 795\, k)$ N

Las componentes de *F* son:

$F_x = -1060$ N

$F_y = 2120$ N

$F_z = 795$ N

Dirección de la fuerza.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{F_x}{\| F \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1060}{2500}\right) = 115.09°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{F_y}{\| F \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2120}{2500}\right) = 32.01°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{F_z}{\| F \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{795}{2500}\right) = 71.46°$$

La dirección de la fuerza puede obtenerse de manera directa a partir del vector unitario *AB*.

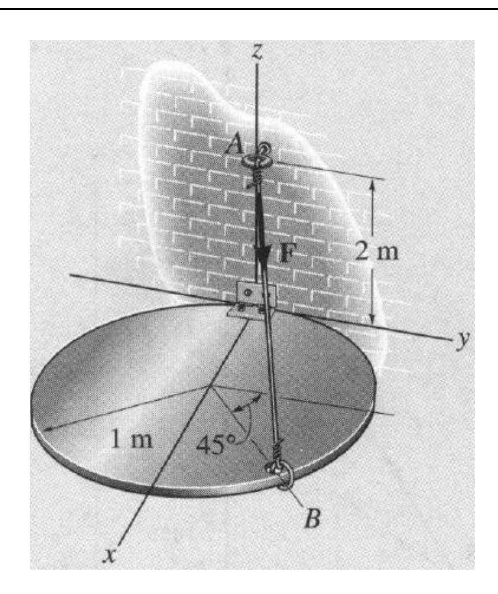
$$\alpha = \cos^{-1} u_{AB_x} = \cos^{-1}(-0.4240) = 115.09°$$

$$\beta = \cos^{-1} u_{AB_y} = \cos^{-1}(0.8480) = 32.01°$$

$$\gamma = \cos^{-1} u_{AB_z} = \cos^{-1}(0.3180) = 71.46°$$

Ejemplo 1.57. Ejemplo 2.14 del Hibbeler. Décima Edición. Página 60.

La placa circular mostrada en la figura está parcialmente soportada por el cable *AB*. Si la fuerza del cable sobre el gancho en *A* es $F = 500$ N, exprese *F* como un vector cartesiano.



Solución.

$F_{AB} = \| F \| u_{AB}$

u_{AB}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto *A*: *A* (0 , 0 , 2)

Coordenadas del punto *B*: *B* (1 + sen 45° , cos 45° , 0), *B* (1.7071 , 0.7071 , 0)

Vector *AB*.

AB = (1.7071 – 0) *i* + (0.7071 – 0) *j* + (0 – 2) *k*

AB = 1.7071 *i* + 0.7071 *j* – 2 *k*

Módulo del vector *AB*:

$\| AB \| = \sqrt{(1.7071)^2 + (0.7071)^2 + (-2)^2}$

$\| AB \| = \sqrt{2.9142 + 0.5 + 4}$

$\| AB \| = \sqrt{7.4142}$

$\| AB \| = 2.7229$

$u_{AB} = \dfrac{1.7071\, i + 0.7071\, j - 2\, k}{2.7229}$

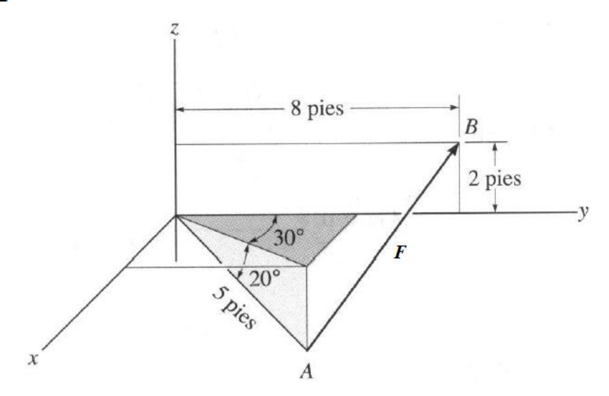
u_{AB} = 0.6269 *i* + 0.2597 *j* – 0.7345 *k*

F_{AB} = 500 (0.6269 *i* + 0.2597 *j* – 0.7345 *k*)

F_{AB} = (313.45 *i* + 129.85 *j* – 367.25 *k*) N

Ejemplo 1.58. Modificación del Problema 2.85 del Hibbeler. Décima Edición. Página 62.

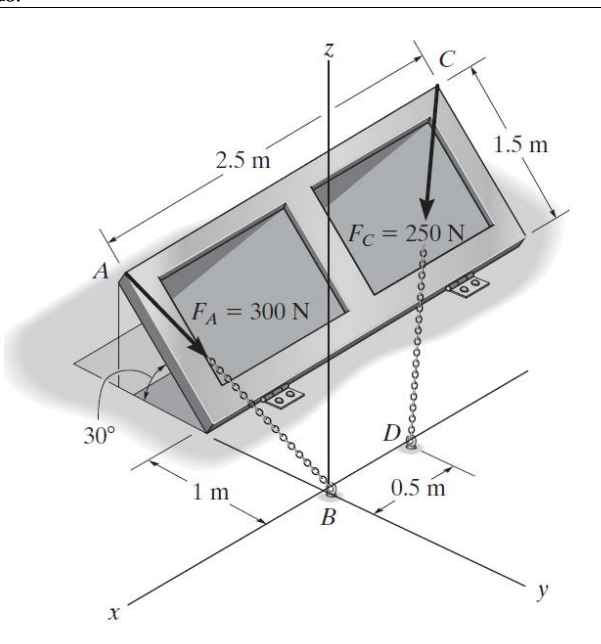
Exprese el vector F, cuyo módulo es 500 N en forma cartesiana vectorial; luego determine su magnitud y sus ángulos coordenados de dirección.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.59. Problema 2.95 del Hibbeler. Décima Edición. Página 64. Problema 2.97 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 66.

La puerta se mantiene abierta por medio de dos cadenas. Si las tensiones en AB y CD son F_A = 300 N y F_C = 250 N, respectivamente, exprese cada una de estas fuerzas en forma vectorial cartesiana.



VER SOLUCIÓN.

1.4.- ADICIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO.

La resultante R de dos o más fuerzas en el espacio se calcula sumando sus componentes rectangulares. Los métodos gráficos o trigonométricos no son muy prácticos en el caso de fuerzas en el espacio.

Se establece que $R = \sum F$. Se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares y se escribe

$$R_x i + R_y j + R_z k = \sum (F_x i + F_y j + F_z k)$$

$$R_x i + R_y j + R_z k = \sum (F_x) i + \sum (F_y) j + \sum (F_z) k$$

de la cual se desprende que

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$R_z = \sum F_z$$

La magnitud de la resultante y los ángulos α, β y γ que ésta forma con el eje de coordenadas se obtienen por las ecuaciones siguientes:

$$\|R\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{\|R\|}$$

$$\cos\beta = \frac{R_y}{\|R\|}$$

$$\cos\gamma = \frac{R_z}{\|R\|}$$

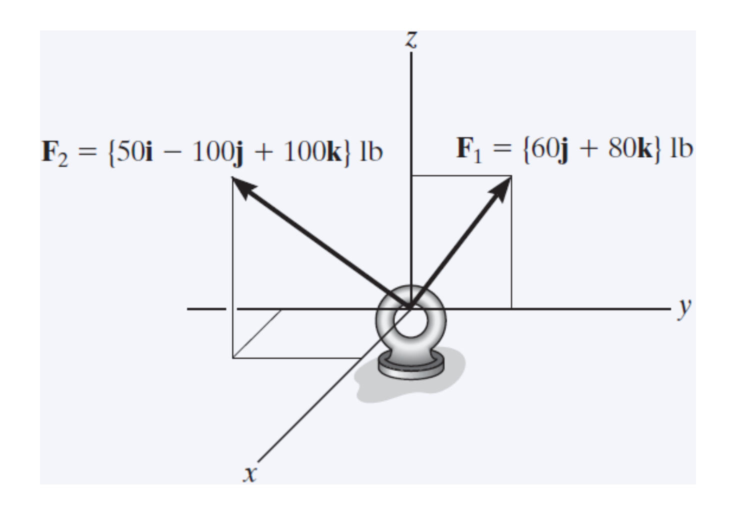
Ejemplo 1.60. Guía de Ejercicios. Prof. Jacqueline Balza. UDOA.

Se tiene dos vectores $A = -2\,i + j - 3\,k$ y $B = 5\,i + 3\,j - 2\,k$. Determine un tercer vector C tal que $3\,A + 2\,B - C = 0$.

VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.61. Ejemplo 2.9 del Hibbeler. Décima Edición. Página 48. Ejemplo 2.9 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 48.

Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante que actúa sobre el anillo en la figura.



Solución.

Fuerza resultante.

$F_R = F_1 + F_2$

$F_R = (60\ j + 80\ k) + (50\ i - 100\ j + 100\ k)$

$F_R = 60\ j + 80\ k + 50\ i - 100\ j + 100\ k$

$F_R = (50\ i - 40\ j + 180\ k)$ lb

Magnitud de la fuerza.

$$\| F \| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\| F_R \| = \sqrt{(50)^2 + (-40)^2 + (180)^2}$$

$$\| F_R \| = \sqrt{2500 + 1600 + 32400}$$

$$\| F_R \| = \sqrt{36500}$$

$$\| F_R \| = 191.05 \text{ lb}$$

Ángulos directores.

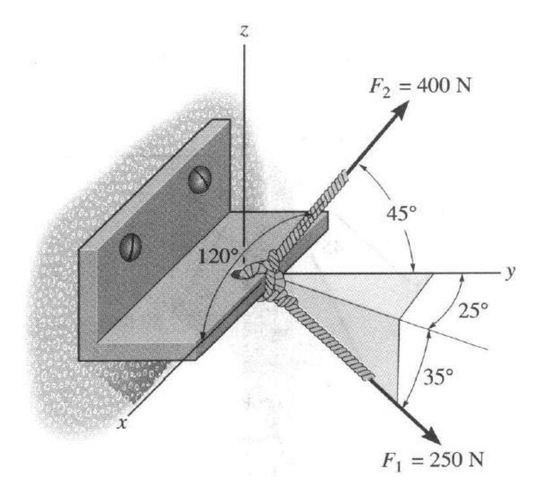
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{F_{R,x}}{\| F_R \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{50}{191.05}\right) = 74.82°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{F_{R,y}}{\| F_R \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-40}{191.05}\right) = 102.09°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{F_z}{\| F_R \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{180}{191.05}\right) = 19.58°$$

Ejemplo 1.62. Problema 2.73 del Hibbeler. Décima Edición. Página 53.

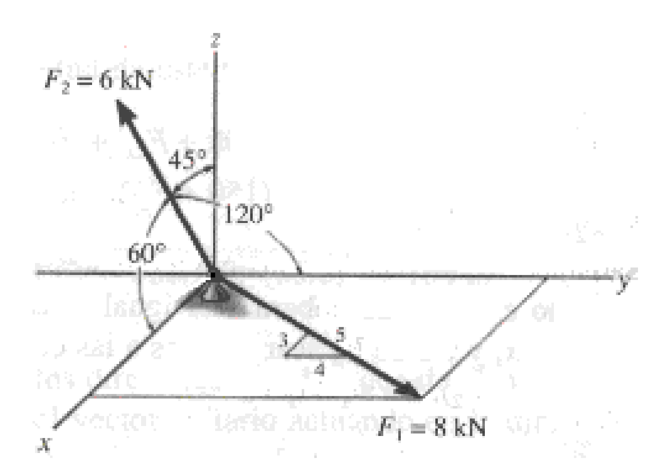
La ménsula está sometida a las dos fuerzas mostradas. Exprese cada fuerza en forma vectorial cartesiana y luego determine la fuerza resultante F_R. Encuentre la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza resultante.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.63. Problema 2.67 del Hibbeler. Séptima Edición.

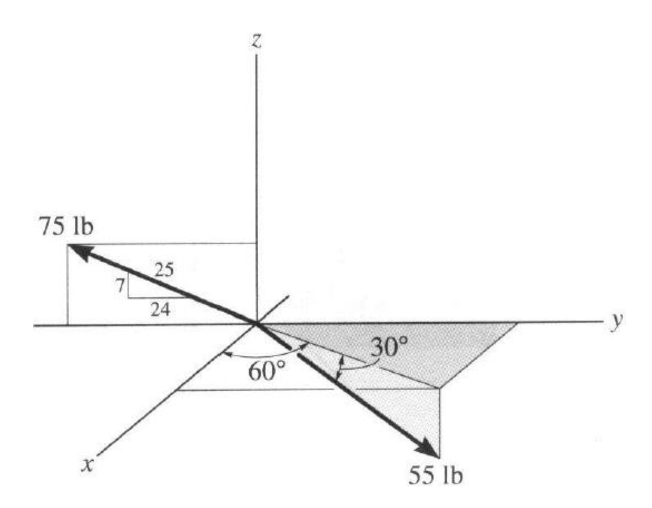
Exprese cada fuerza como un vector cartesiano y después determina la fuerza resultante F_R. Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados y dibuje este vector en el sistema coordenado.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.64. Problema 2.62 del Hibbeler. Décima Edición. Página 51.

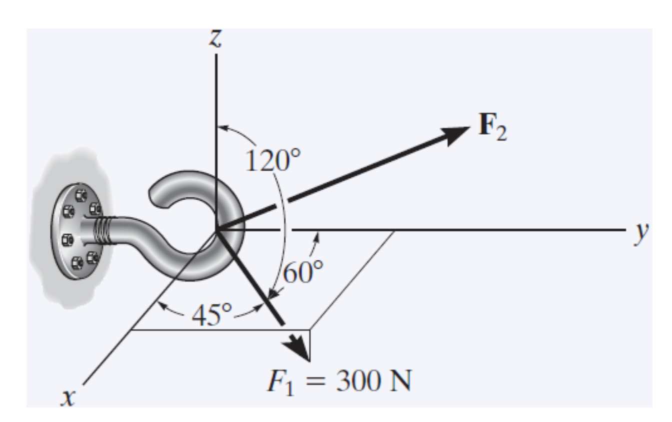
Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.65. Ejemplo 2.11 del Hibbeler. Décima Edición. Página 50. Ejemplo 2.11 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 50.

Dos fuerzas actúan sobre el gancho que se muestra en la figura. Especifique la magnitud de F_2 y sus ángulos directores coordenados, de modo que la fuerza resultante F_R actúe a lo largo del eje y positivo y tenga una magnitud de 800 N.



Solución.

Fuerza resultante.

$F_R = F_1 + F_2$

Al despejar la fuerza F_2 de la ecuación anterior:

$F_2 = F_R – F_1$

La fuerza F_R es:

$F_R = (800\ j)$ N

Las componentes rectangulares de la fuerza F_1 son:

$F_{1x} = 300 \cos 45° = 212.13$ N

$F_{1y} = 300 \cos 60° = 150$ N

$F_{1z} = 300 \cos 120° = –150$ N

Fuerza F_1 expresada como un vector cartesiano:

$F_1 = (212.13\ i + 150\ j – 150\ k)$ N

Cálculo de F_2.

$F_2 = F_R – F_1$

$F_2 = (800\ j) – (212.13\ i + 150\ j – 150\ k)$

$F_2 = 800\ j – 212.13\ i – 150\ j + 150\ k$

$F_2 = –212.13\ i + 650\ j + 150\ k$

Magnitud de la fuerza.

$$\| F_2 \| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\| F_2 \| = \sqrt{(-212.13)^2 + (650)^2 + (150)^2}$$

$$\| F_2 \| = \sqrt{45000 + 422500 + 22500}$$

$$\| F_2 \| = \sqrt{490000}$$

$$\| F_2 \| = 700 \text{ N}$$

Ángulos directores.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{F_{2x}}{\| F_2 \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-212.13}{700}\right) = 107.64°$$

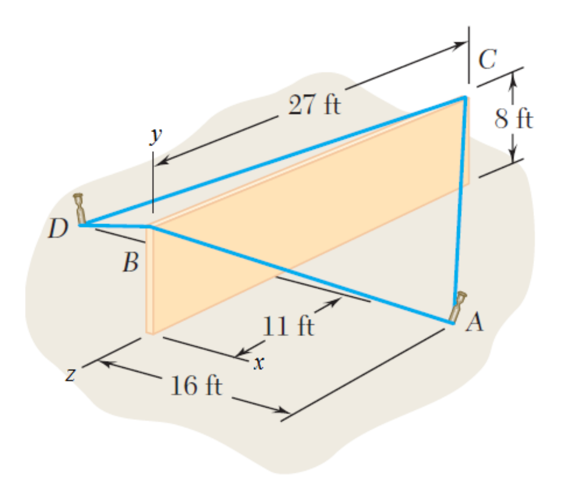
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{F_{2y}}{\| F_2 \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{650}{700}\right) = 21.79°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{F_{2z}}{\|F_2\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{150}{700}\right) = 77.63°$$

Ejemplo 1.66. Problema resuelto 2.8 del Beer – Johnston. Novena Edición. Página 51.

Problema resuelto 2.8 del Beer – Johnston. Décima Edición. Página 51.

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable *AB* y 1200 lb en el cable *AC*; determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables *AB* y *AC* sobre la estaca *A*.

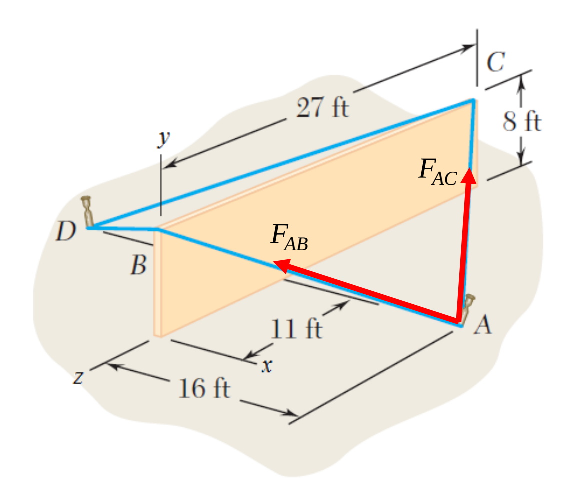


Solución.

$$\|F_{AB}\| = 840 \text{ lb}$$

$$\|F_{AC}\| = 1200 \text{ lb}$$

En la figura siguiente se muestran los vectores fuerza dirigidos desde el punto *A* hacia el punto *B* y desde el punto *A* hacia el punto *C*.



Fuerza resultante.

$F_R = F_{AB} + F_{AC}$

Fuerzas individuales.

Fuerza en el cable *AB*.

$$F_{AB} = \| F_{AB} \| u_{AB}$$

u_{AB}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto *A*: *A* (16 , 0 , –11)

Coordenadas del punto *B*: *B* (0 , 8 , 0)

Vector *AB*.

AB = (0 – 16) *i* + (8 – 0) *j* + [0 – (–11)] *k*

AB = – 16 *i* + 8 *j* + 11 *k*

Módulo del vector *AB*:

$$\| AB \| = \sqrt{(-16)^2 + (8)^2 + (11)^2}$$

$$\| AB \| = \sqrt{256 + 64 + 121}$$

$$\| AB \| = \sqrt{441}$$

$$\| AB \| = 21$$

$$u_{AB} = \frac{-16\,i + 8\,j + 11\,k}{21}$$

u_{AB} = –0.7619 *i* + 0.3809 *j* + 0.5238 *k*

F_{AB} = 840 (–0.7619 i + 0.3809 j + 0.5238 k)

F_{AB} = –640 i + 320 j + 440 k

Fuerza en el cable AC.

$$F_{AC} = \| F_{AC} \| u_{AC}$$

u_{AC}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto A: A (16 , 0 , –11)

Coordenadas del punto C: C (0 , 8 , –27)

Vector AC.

AC = (0 – 16) i + (8 – 0) j + [(–27) – (–11)] k

AC = – 16 i + 8 j – 16 k

Módulo del vector AC:

$$\| AC \| = \sqrt{(-16)^2 + (8)^2 + (-16)^2}$$

$$\| AC \| = \sqrt{256 + 64 + 256}$$

$$\| AC \| = \sqrt{576}$$

$$\| AC \| = 24$$

$$u_{AC} = \frac{-16\,i + 8\,j - 16\,k}{24}$$

u_{AC} = –0.6667 i + 0.3333 j + 0.6667 k

F_{AC} = 1200 (–0.6667 i + 0.3333 j + 0.6667 k)

F_{AC} = –800 i + 400 j – 800 k

Fuerza resultante.

F_R = (–640 i + 320 j + 440 k) + (–800 i + 400 j – 800 k)

F_R = –640 i + 320 j + 440 k – 800 i + 400 j – 800 k

F_R = (–1440 i + 720 j – 360 k)

Magnitud de la fuerza resultante.

$$\| F_R \| = \sqrt{(-1440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$\|F_R\| = \sqrt{2073600 + 518400 + 129600}$$

$$\|F_R\| = \sqrt{2721600}$$

$$\|F_R\| = 1649.73 \text{ lb}$$

Dirección de la fuerza resultante.

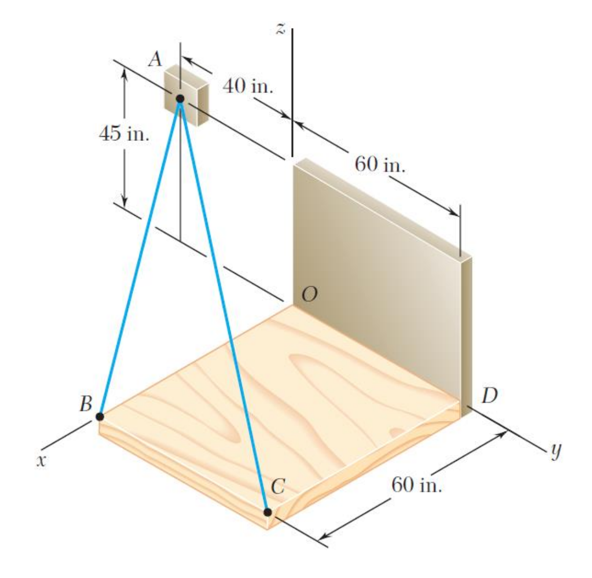
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{F_{Rx}}{\|F_R\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1440}{1649.73}\right) = 150.79°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{F_{Ry}}{\|F_R\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{720}{1649.73}\right) = 64.12°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{F_{Rz}}{\|F_R\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-360}{1649.73}\right) = 102.60°$$

Ejemplo 1.67. Problema 2.93 del Beer – Johnston. Novena Edición. Página 56. Problema 2.93 del Beer – Johnston. Décima Edición. Página 47.

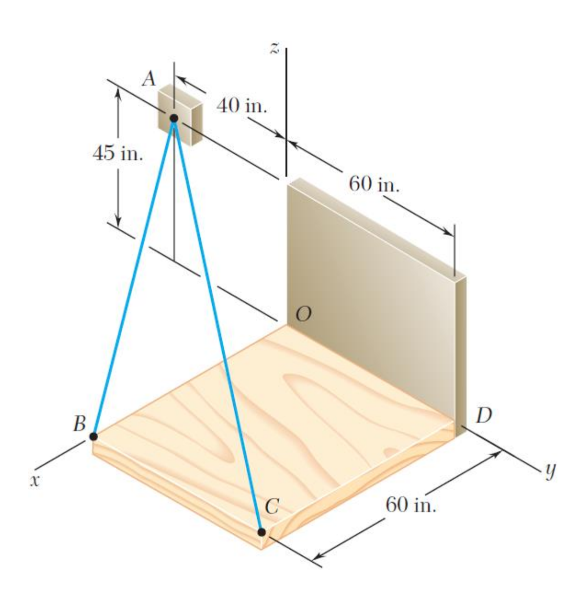
Si se sabe que las tensiones en los cables *AB* y *AC* son de 425 lb y de 510 lb respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en *A* por los dos cables.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.68. Problema 2.94 del Beer – Johnston. Novena Edición. Página 56. Problema 2.94 del Beer – Johnston. Décima Edición. Página 47.

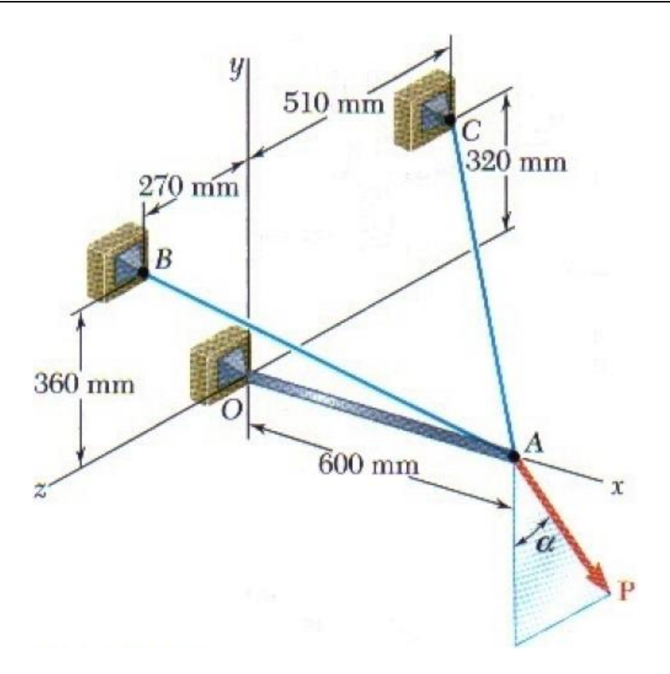
Si se sabe que las tensiones en los cables *AB* y *AC* son de 510 lb y de 425 lb respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en *A* por los dos cables.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.69. Problema 2.95 del Beer – Johnston. Octava Edición. Página 57.

El aguilón *OA* soporta una carga *P* y está sostenido por dos cables, según muestra la figura. Si en el cable *AB* la tensión es de 510 N y en el cable *AC* es de 765 N, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.



VER SOLUCIÓN.

1.5.- EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO.

Una partícula A está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre A es cero. Las componentes R_x, R_y y R_z de la resultante están dadas por

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$R_z = \sum F_z$$

Al expresar que las componentes de la resultante son cero, se escribe

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

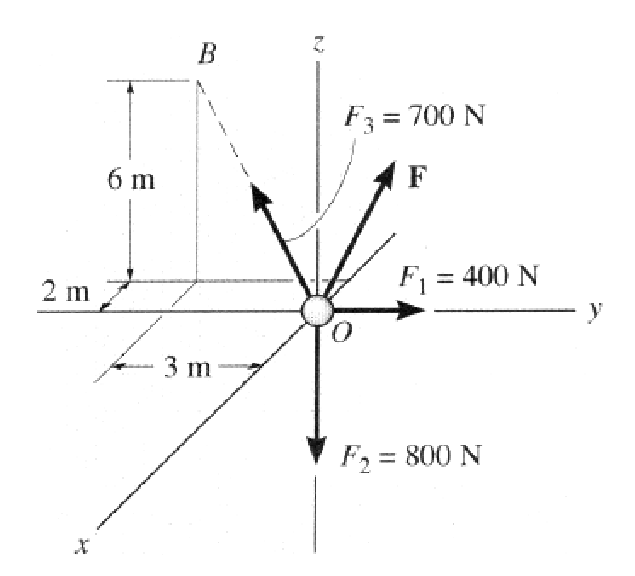
$$\sum F_z = 0$$

Las ecuaciones anteriores representan las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio de una partícula en el espacio. Estas ecuaciones pueden usarse para resolver problemas que tratan con el equilibrio de una partícula y en los que intervienen no más de tres incógnitas.

Para resolver tales problemas, se traza el diagrama del cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Deben escribirse las ecuaciones de equilibrio y despejar las tres incógnitas. En los tipos de problemas más comunes, estas incógnitas representan 1) las tres componentes de una sola fuerza o 2) la magnitud de tres fuerzas, cada una con dirección conocida.

Ejemplo 1.70. Ejemplo 3.6 del Hibbeler. Décima Edición. Página 101.

Determine la magnitud y los ángulos coordenados de dirección de la fuerza F en la figura que son requeridos para obtener el equilibrio de la partícula O.



Solución.

Condición de equilibrio: $\sum F = 0$

$F_1 + F_2 + F_3 + F = 0$

Al despejar la fuerza F de la ecuación anterior:

$F = -F_1 - F_2 - F_3$

Fuerzas individuales.

$F_1 = (400\, j)$ N

$F_2 = (-800\, k)$ N

$F_3 = \|F_3\| u_{OB}$

u_{OB}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto O: O (0 , 0 , 0)

Coordenadas del punto B: B (–2 , –3 , 6)

Vector OB.

$OB = (-2 - 0)\, i + (-3 - 0)\, j + (6 - 0)\, k$

$OB = -2\, i - 3\, j + 6\, k$

Módulo del vector OB:

$$\|OB\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}$$

$$\|OB\| = \sqrt{4 + 9 + 36}$$

$$\|OB\| = \sqrt{49}$$

$$\|OB\| = 7$$

$$u_{OB} = \frac{-2i - 3j + 6k}{7}$$

$u_{OB} = -0.2857\, i + 0.4286\, j + 0.8571\, k$

$F_3 = 700\, (-0.2857\, i + 0.4286\, j + 0.8571\, k)$

$F_3 = -200\, i + 300\, j + 600\, k$

Vector F.

$F = -F_1 - F_2 - F_3$

$F = -(400\, j) - (-800\, k) - (-200\, i + 300\, j + 600\, k)$

$F = -400\, j + 800\, k + 200\, i - 300\, j - 600\, k$

$F = (200\, i - 700\, j + 200\, k)$ N

Magnitud de la fuerza.

$$\|F\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\|F\| = \sqrt{(200)^2 + (-700)^2 + (200)^2}$$

$$\|F\| = \sqrt{40000 + 490000 + 40000}$$

$$\|F\| = \sqrt{570000}$$

$$\| F \| = 754.98 \text{ N}$$

Ángulos directores.

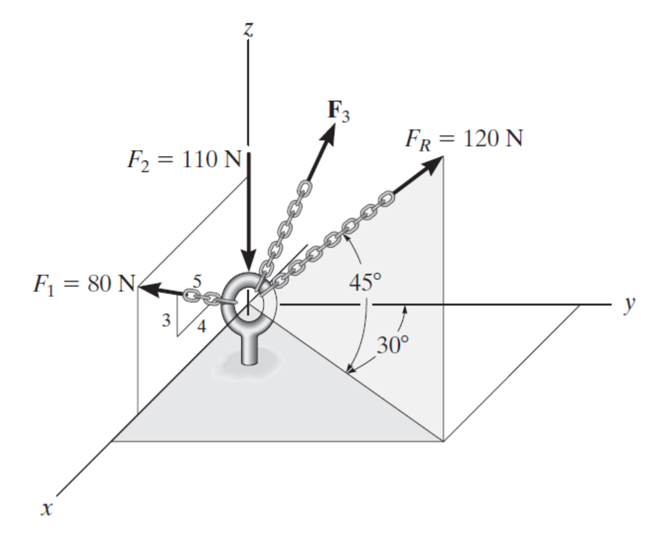
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{F_x}{\| F \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{200}{754.98}\right) = 74.64°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{F_y}{\| F \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-700}{754.98}\right) = 158.00°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{F_z}{\| F \|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{200}{754.98}\right) = 74.64°$$

Ejemplo 1.71. Problema 2.77 del Hibbeler. Décima Edición. Página 54. Problema 2.83 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 55.

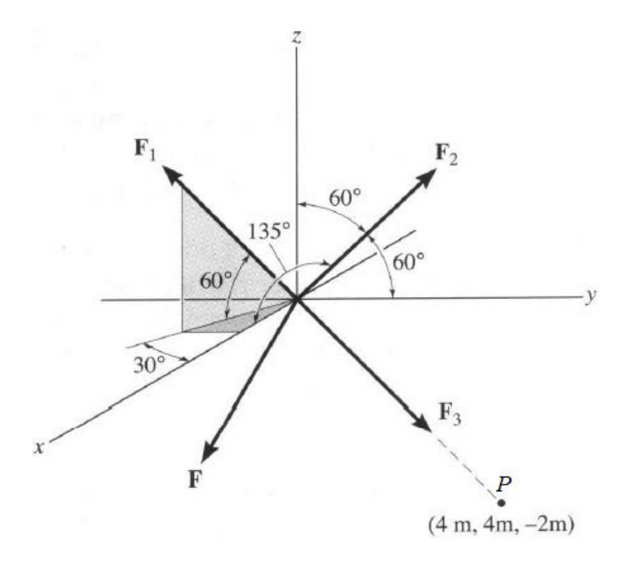
Tres fuerzas actúan sobre el anillo. Si la fuerza resultante F_R tiene la magnitud y la dirección que se muestran en la figura, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza F_3.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.72. Problema 3.70 del Hibbeler. Décima Edición. Página 110.

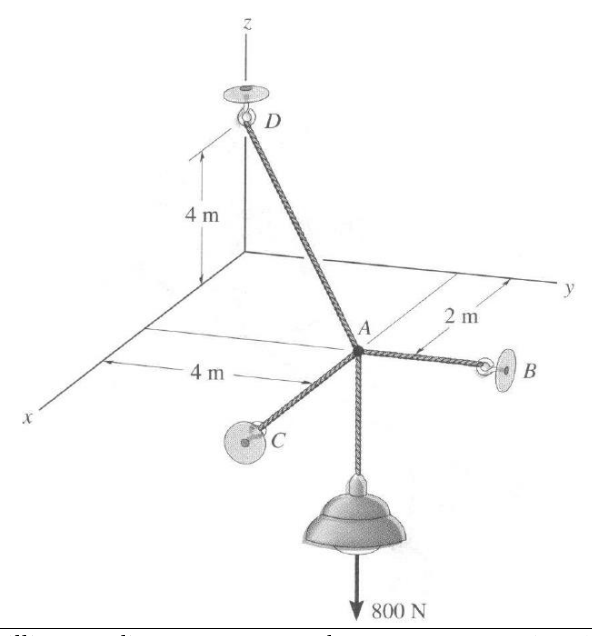
Determine las magnitudes de las fuerzas F_1, F_2 y F_3 necesarias para mantener la fuerza $F = (-9\,i - 8\,j - 5\,k)$ kN en equilibrio.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.73. Problema 3.45 del Hibbeler. Décima Edición. Página 105.

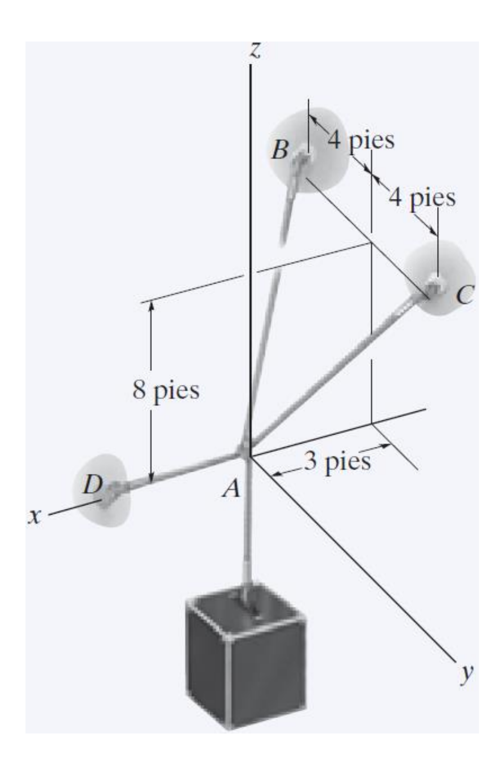
Los tres cables se usan para dar soporte a la lámpara de 800 N. Determine la fuerza desarrollada en cada cable en la posición de equilibrio.



VER SOLUCIÓN.

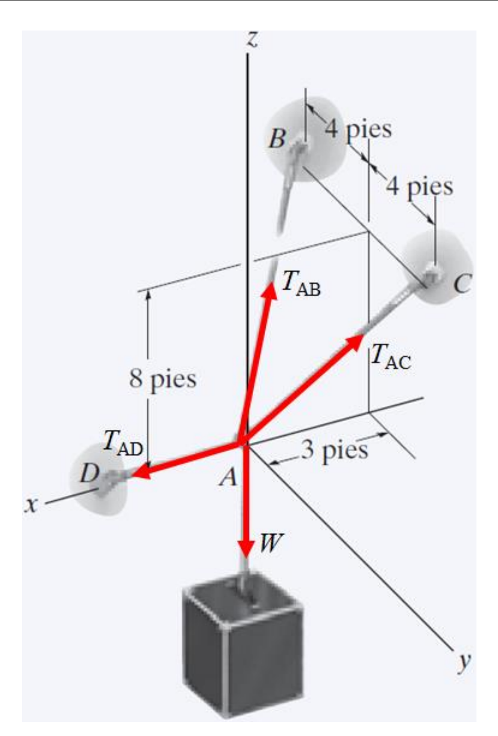
Ejemplo 1.74. Ejemplo 3.7 del Hibbeler. Décima Edición. Página 102. Ejemplo 3.7 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 106.

Determine la fuerza desarrollada en cada cable usado para soportar el cajón de 40 lb que se muestra en la figura.



Solución.

En la figura siguiente se muestran las fuerzas involucradas:



Condición de equilibrio: $\sum F = 0$

$T_{AB} + T_{AC} + T_{AD} + W = 0$

Fuerzas individuales.

$T_{AD} = \| T_{AD} \| i$

$W = (-\,40\,k\,)$ lb

Fuerza en el cable *AB*.

$T_{AB} = \| T_{AB} \| u_{AB}$

u_{AB}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto *A*: *A* (0 , 0 , 0)

Coordenadas del punto *B*: *B* (–3 , –4 , 8)

Vector *AB*.

$AB = (-3 - 0)\,i + (-4 - 0)\,j + (8 - 0)\,k$

$AB = -\,3\,i - 4\,j + 8\,k$

Módulo del vector *AB*:

$\| AB \| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}$

$$\| AB \| = \sqrt{9+16+64}$$

$$\| AB \| = \sqrt{89}$$

$$\| AB \| = 9.4339$$

$$u_{AB} = \frac{-3i-4j+8k}{9.4339}$$

$u_{AB} = -0.3180\ i - 0.4240\ j + 0.8480\ k$

$$T_{AB} = \| T_{AB} \| (-0.3180\, i + 0.4240\ j + 0.8480\, k)$$

$$T_{AB} = -0.3180 \| T_{AB} \| i - 0.4240 \| T_{AB} \| j + 0.8480 \| T_{AB} \| k$$

Fuerza en el cable *AC*.

$$T_{AC} = \| T_{AC} \| u_{AC}$$

u_{AC}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto *A*: *A* (0 , 0 , 0)

Coordenadas del punto *C*: *C* (–3 , 4 , 8)

Vector AC.

$AC = (-3-0)\ i + (4-0)\ j + (8-0)\ k$

$AC = -3\ i + 4\ j + 8\ k$

Módulo del vector *AC*:

$$\| AC \| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}$$

$$\| AC \| = \sqrt{9+16+64}$$

$$\| AC \| = \sqrt{89}$$

$$\| AC \| = 9.4339$$

$$u_{AC} = \frac{-3i+4j+8k}{9.4339}$$

$u_{AC} = -0.3180\ i + 0.4240\ j + 0.8480\ k$

$$T_{AC} = \| T_{AC} \| (-0.3180\, i + 0.4240\ j + 0.8480\, k)$$

$T_{AC} = -0.3180\| T_{AC} \| i + 0.4240\| T_{AC} \| j + 0.8480\| T_{AC} \| k$

Al sustituir las fuerzas en la condición de equilibrio:

Fuerza	i	j	k
T_{AB} :	$-0.3180\| T_{AB} \|$	$-0.4240\| T_{AB} \|$	$+0.8480\| T_{AB} \|$
T_{AC} :	$-0.3180\| T_{AC} \|$	$+0.4240\| T_{AC} \|$	$+0.8480\| T_{AC} \|$
T_{AD} :	$\| T_{AD} \|$		
W :			-40

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-0.3180\| T_{AB} \| - 0.3180\| T_{AC} \| + \| T_{AD} \| = 0 \quad (1)$$

$$-0.4240\| T_{AB} \| + 0.4240\| T_{AC} \| = 0 \quad (2)$$

$$0.8480\| T_{AB} \| + 0.8480\| T_{AC} \| = 40 \quad (3)$$

De la ecuación (2):

$$0.4240\| T_{AC} \| = 0.4240\| T_{AB} \|$$

$$\| T_{AC} \| = \| T_{AB} \| \quad (4)$$

Al sustituir la ecuación (4) en la ecuación (3):

$$0.8480\| T_{AB} \| + 0.8480\| T_{AB} \| = 400$$

$$1.696\| T_{AB} \| = 40$$

$$\| T_{AB} \| = \frac{40}{1.696}$$

$$\| T_{AB} \| = 23.58 \text{ lb}$$

De la ecuación (4):

$$\| T_{AC} \| = 23.58 \text{ lb}$$

De la ecuación (1):

$$\| T_{AD} \| = 0.3180\| T_{AB} \| + 0.3180\| T_{AC} \|$$

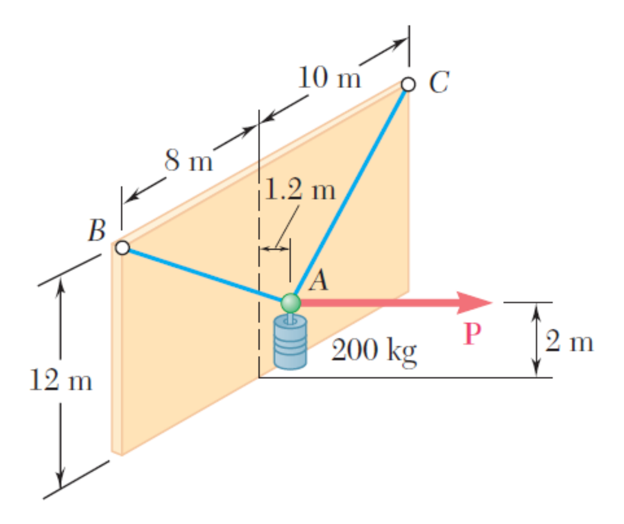
$$\| T_{AD} \| = 0.3180 \ (23.58 \text{ lb}) + 0.3180 \ (23.58 \text{ lb})$$

$$\| T_{AD} \| = 15 \text{ lb}$$

Ejemplo 1.75. Problema resuelto 2.9 del Beer – Johnston. Novena Edición. Página 58.

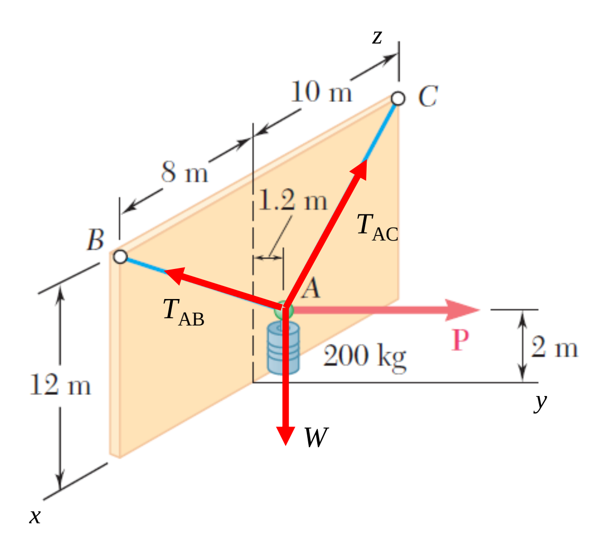
Problema resuelto 2.9 del Beer – Johnston. Décima Edición. Página 48.

Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables *AB* y *AC* que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal P perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determine la magnitud de P y la tensión en cada cable.



Solución.

En la figura siguiente se muestran las fuerzas involucradas:



Condición de equilibrio: $\sum F = 0$

$P + T_{AB} + T_{AC} + W = 0$

Fuerzas individuales.

$P = \| P \| j$

$W = (-1962\ k)$ N

Fuerza en el cable *AB*.

$T_{AB} = \| T_{AB} \| u_{AB}$

u_{AB}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto *A*: *A* (0 , 1.2 , 2)

Coordenadas del punto *B*: *B* (8 , 0 , 12)

Vector *AB*.

$AB = (8 - 0)\ i + (0 - 1.2)\ j + (12 - 2)\ k$

$AB = 8\ i - 1.2\ j + 10\ k$

Módulo del vector *AB*:

$$\| AB \| = \sqrt{(8)^2 + (-1.2)^2 + (10)^2}$$

$$\| AB \| = \sqrt{64 + 1.44 + 100}$$

$$\| AB \| = \sqrt{165.44}$$

$$\| AB \| = 12.8623$$

$$u_{AB} = \frac{8i - 1.2\ j + 10\ k}{12.8623}$$

$u_{AB} = 0.6220\ i - 0.0933\ j + 0.7775\ k$

$$T_{AB} = \| T_{AB} \| (0.6220\ i - 0.0933\ j + 0.7775\ k)$$

$$T_{AB} = 0.6220 \| T_{AB} \| i - 0.0933 \| T_{AB} \| j + 0.7775 \| T_{AB} \| k$$

Fuerza en el cable *AC*.

$T_{AC} = \| T_{AC} \| u_{AC}$

u_{AC}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto *A*: *A* (0 , 1.2 , 2)

Coordenadas del punto *C*: *C* (–10 , 0 , 12)

Vector *AC*.

AC = (–10 – 0) i + (0 – 1.2) j + (12 – 2) k

AC = – 10 i – 1.2 j + 10 k

Módulo del vector AC:

$$\| AC \| = \sqrt{(-10)^2 + (-1.2)^2 + (10)^2}$$

$$\| AC \| = \sqrt{100 + 1.44 + 100}$$

$$\| AC \| = \sqrt{201.44}$$

$$\| AC \| = 14.1930$$

$$u_{AC} = \frac{-10\,i - 1.2\,j + 10\,k}{14.1930}$$

u_{AC} = –0.7046 i – 0.0845 j + 0.7046 k

$$T_{AC} = \| T_{AC} \| (-0.7046\,i + 0.0845\,j + 0.7046\,k)$$

$$T_{AC} = -0.7046 \| T_{AC} \| i - 0.0845 \| T_{AC} \| j + 0.7046 \| T_{AC} \| k$$

Al sustituir las fuerzas en la condición de equilibrio:

Fuerza	i	j	k
P:		$\| P \|$	
T_{AB}:	$0.6220 \| T_{AB} \|$	$-0.0933 \| T_{AB} \|$	$+0.7775 \| T_{AB} \|$
T_{AC}:	$-0.7046 \| T_{AC} \|$	$-0.0845 \| T_{AC} \|$	$+0.7046 \| T_{AC} \|$
W:			-1962

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{llllll} & 0.6220 \| T_{AB} \| & -0.7046 \| T_{AC} \| & = & 0 & (1) \\ \| P \| & -0.0933 \| T_{AB} \| & -0.0845 \| T_{AC} \| & = & 0 & (2) \\ & 0.7775 \| T_{AB} \| & +0.7046 \| T_{AC} \| & = & 1962 & (3) \end{array}$$

De la ecuación (1):

$$0.6220 \| T_{AB} \| = 0.7046 \| T_{AC} \|$$

$$\| T_{AB} \| = \frac{0.7046}{0.6220} \| T_{AC} \|$$

$$\| T_{AB} \| = 1.1328 \| T_{AC} \| \quad (4)$$

Al sustituir en la ecuación (3):

$$0.7775\,(1.1328\,\|\,T_{AC}\,\|)+0.7046\,\|\,T_{AC}\,\|=1962$$

$$0.8808\,\|\,T_{AC}\,\|+0.7046\,\|\,T_{AC}\,\|=1962$$

$$1.5854\,\|\,T_{AC}\,\|=1962$$

$$\|\,T_{AC}\,\|=\frac{1962}{1.5854}$$

$$\|\,T_{AC}\,\|=1237.54\text{ N}$$

De la ecuación (4):

$$\|\,T_{AB}\,\|=1.1328\,(1237.54\text{ N})$$

$$\|\,T_{AB}\,\|=1401.89\text{ N}$$

De la ecuación (2):

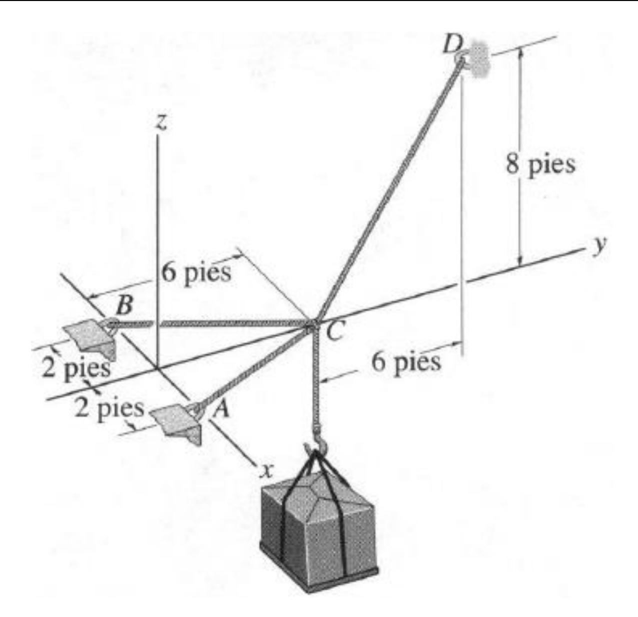
$$\|\,P\,\|=0.0933\,\|\,T_{AB}\,\|+0.0845\,\|\,T_{AC}\,\|$$

$$\|\,P\,\|=0.0933\,(1401.89\text{ N})+0.0845\,(1237.54\text{ N})$$

$$\|\,P\,\|=235.37\text{ N}$$

Ejemplo 1.76. Problema 3.74 del Hibbeler. Décima Edición. Página 111.

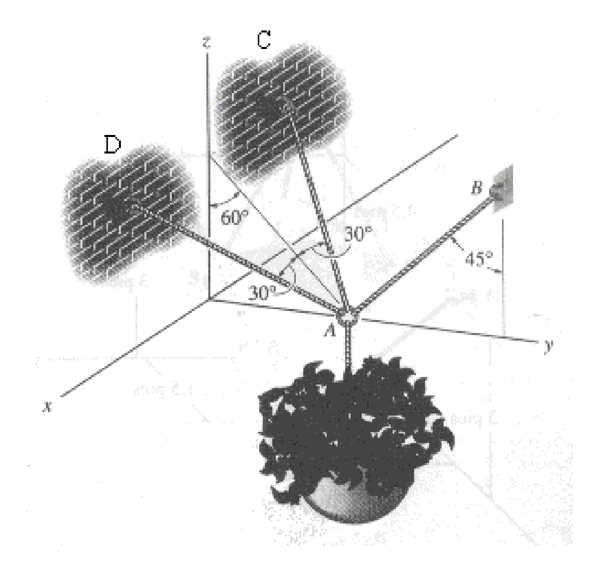
Determine la fuerza necesaria en cada cable para sostener la carga de 500 lb.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.77. Problema 3.45 del Hibbeler. Septima Edición.

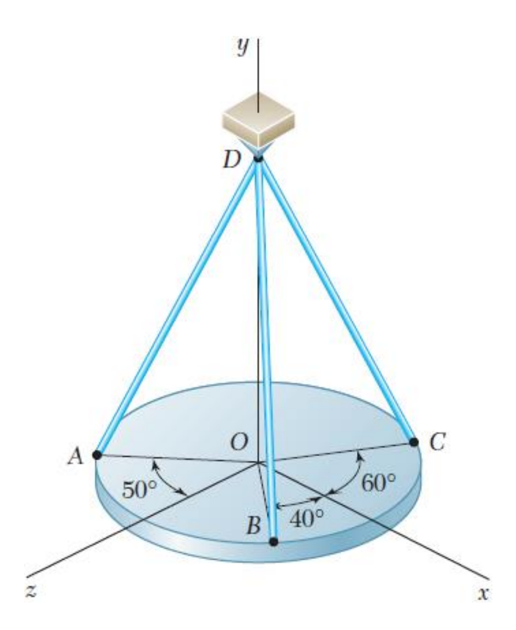
Si cada una de las cuerdas puede soportar una tensión máxima de 50 N antes de que se rompa, determine el peso máximo del florero que pueden soportar dichas cuerdas.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.78. Problema 2.114 del Beer – Johnston. Novena Edición. Página 62. Problema 2.120 del Beer – Johnston. Décima Edición. Página 53.

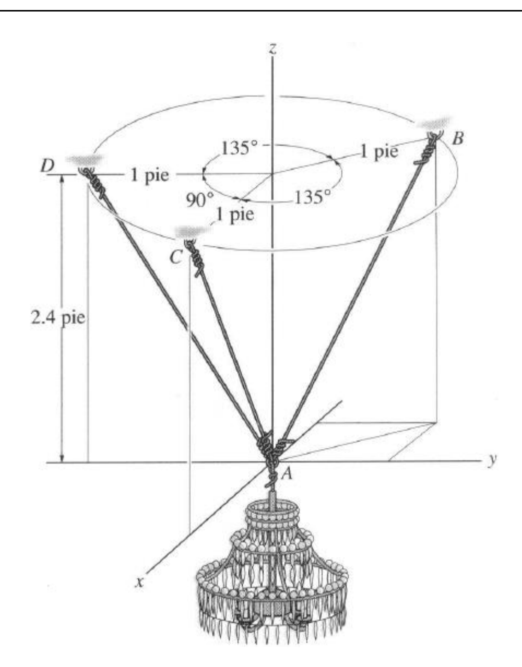
Una placa circular horizontal que pesa 60 lb está suspendida de tres alambres que forman ángulos de 30º respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Determine la tensión en cada alambre.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.79. Problema 3.59 del Hibbeler. Décima Edición. Página 107.

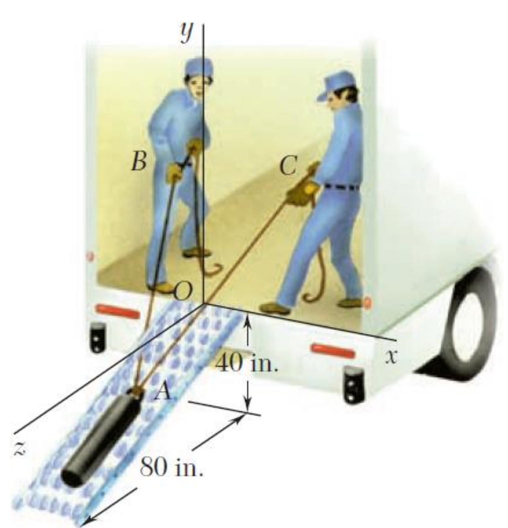
El candelabro de 80 lb está soportado por los tres alambres como se muestra. Determine la fuerza en cada alambre en la posición de equilibrio.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.80. Problema 2.119 del Beer – Johnston. Novena Edición. Página 62.

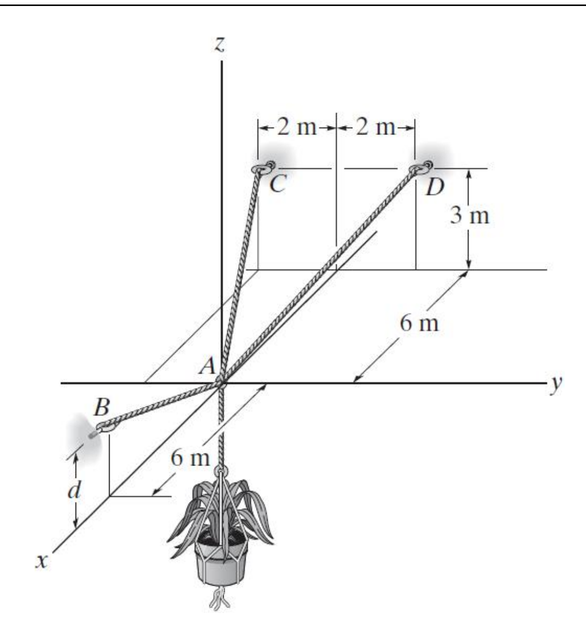
Dos trabajadores descargan de un camión un contrapeso de 200 lb de hierro fundido usando dos cuerdas y una rampa con rodillos. Si se sabe que en el instante mostrado el contrapeso está inmóvil, determine la tensión en cada cuerda si las coordenadas de posición de los puntos son A (0 , –20 in , 40 in), B (–40 , 50 in , 0) y B (45 in , 40 in , 0), respectivamente. Suponga que no hay fricción entre la rampa y el contrapeso. (*Sugerencia*: Puesto que no hay fricción, la fuerza ejercida por la rampa sobre el contrapeso debe ser perpendicular a éste)



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.81. Problema 3.57 del Hibbeler. Décima Edición. Página 107. Problema 3.61 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 111.

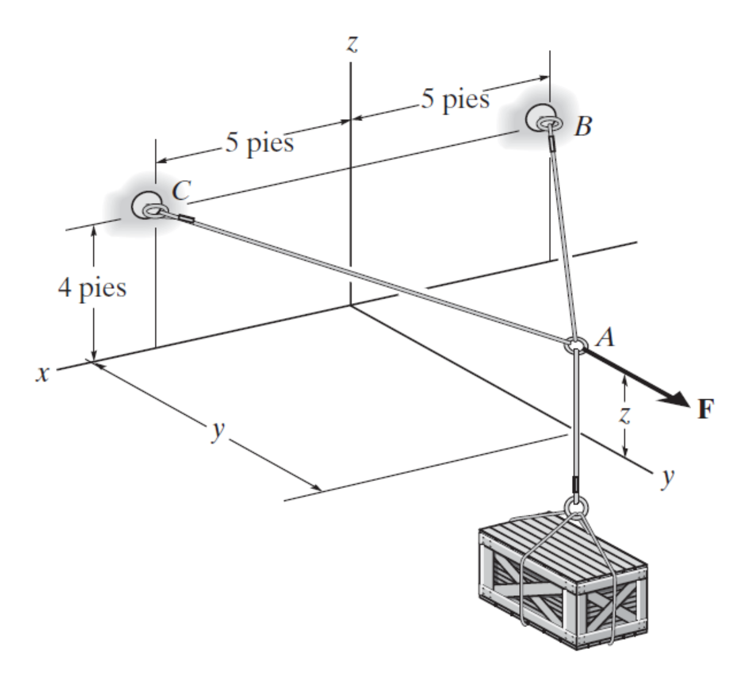
Determine la altura del cable AB de manera que la fuerza en los cables AD y AC tenga la mitad del valor de la fuerza presente en el cable AB. ¿Cuál es la fuerza presente en cada cable para este caso? La maceta tiene una masa de 50 kg.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.82. Problema 3.63 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 111.

Si la tensión máxima permitida en los cables *AB* y *AC* es de 500 lb, determine la altura máxima z a la cual se puede elevar la caja de 200 lb. ¿Cuál es la fuerza horizontal F que debe aplicarse? Considere $y = 5$ pies.

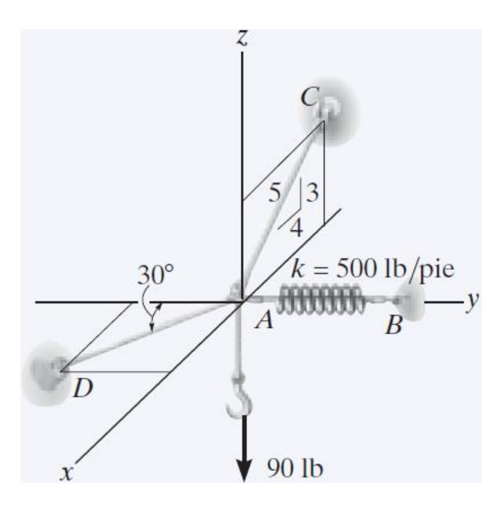


VER SOLUCIÓN.

Sistemas que involucran resortes.

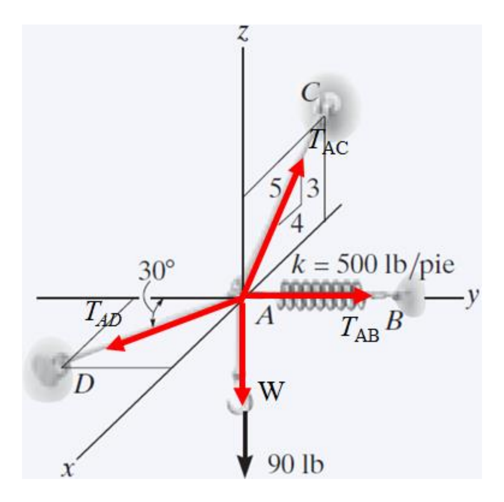
Ejemplo 1.83. Ejemplo 3.5 del Hibbeler. Décima Edición. Página 100. Ejemplo 3.5 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 104.

Una carga de 90 lb está suspendida del gancho mostrado en la figura. La carga está soportada por dos cables y un resorte con rigidez k = 500 lb/pie. Determine la fuerza presente en los cables y el alargamiento del resorte en la posición de equilibrio. El cable AD se encuentra en el plano $x - y$ y el cable AC en el plano $x - z$.



Solución.

En la figura siguiente se muestran las fuerzas involucradas:



Condición de equilibrio: $\sum F = 0$

$T_{AB} + T_{AC} + T_{AD} + W = 0$

Fuerzas individuales.

$W = (-90\,k)$ lb

Tensión en el cable *AB*.

$$T_{AB} = \| T_{AB} \| j$$

Tensión en el cable *AC*.

$$T_{AC} = -\tfrac{4}{5}\| T_{AC} \| i + \tfrac{3}{5}\| T_{AC} \| k$$

$$T_{AC} = -0.8\| T_{AC} \| i + 0.6\| T_{AC} \| k$$

Tensión en el cable *AD*.

$$T_{AD} = \| T_{AD} \| u_{AD}$$

u_{AD}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

$u_{AD} = (\text{sen } 30°)\, i - (\cos 30°)\, j$

$u_{AD} = 0.5\, i - 0.8660\, j$

$$T_{AD} = \| T_{AD} \| (0.5\, i - 0.8660\, j)$$

$$T_{AD} = 0.5\| T_{AD} \| i - 0.8660\| T_{AD} \| j$$

Al sustituir las fuerzas en la condición de equilibrio:

Fuerza	i	j	k
T_{AB} :		$\| T_{AB} \|$	
T_{AC} :	$-0.80\| T_{AC} \|$		$+0.60\| T_{AC} \|$
T_{AD} :	$0.5\| T_{AD} \|$	$-0.8660\| T_{AD} \|$	
W :			-90

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-0.80\| T_{AC} \| + 0.5\| T_{AD} \| = 0 \quad (1)$$

$$\| T_{AB} \| - 0.8660\| T_{AD} \| = 0 \quad (2)$$

$$0.60\| T_{AC} \| = 90 \quad (3)$$

De la ecuación (3):

$$0.60\|\,T_{AC}\,\| = 90$$

$$\|\,T_{AC}\,\| = \frac{90}{0.60}$$

$$\|T_{AC}\| = 150 \text{ lb}$$

De la ecuación (1):

$$0.5\|\,T_{AD}\,\| = 0.80\|\,T_{AC}\,\|$$

$$\|\,T_{AD}\,\| = \frac{0.80}{0.5}\|\,T_{AC}\,\|$$

$$\|\,T_{AD}\,\| = \frac{0.80}{0.5}(150 \text{ lb})$$

$$\|T_{AD}\| = 240 \text{ lb}$$

De la ecuación (2):

$$\|\,T_{AB}\,\| = 0.8660\|\,T_{AD}\,\|$$

$$\|\,T_{AB}\,\| = 0.8660\,(240 \text{ lb})$$

$$\|T_{AB}\| = 207.84 \text{ lb}$$

Alargamiento del resorte.

$$\|T_{AB}\| = k\,\Delta l$$

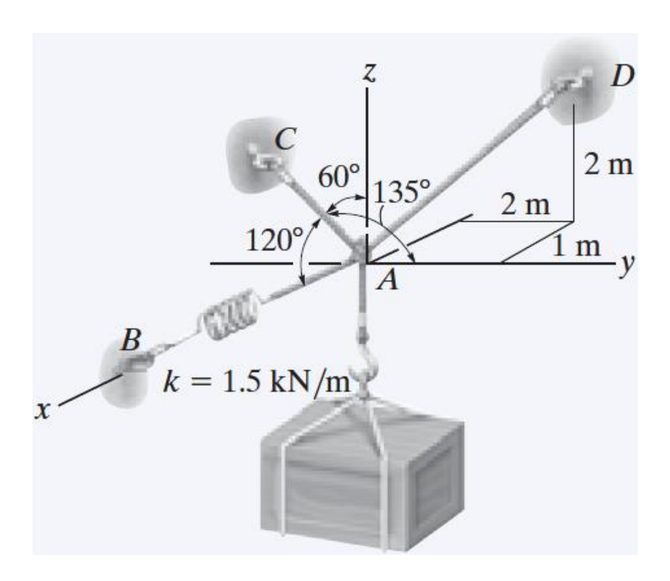
$$\Delta l = \frac{\|T_{AB}\|}{k}$$

$$\Delta l = \frac{207.84 \text{ lb}}{500 \text{ lb/pie}}$$

$$\Delta l = 0.4157 \text{ pie}$$

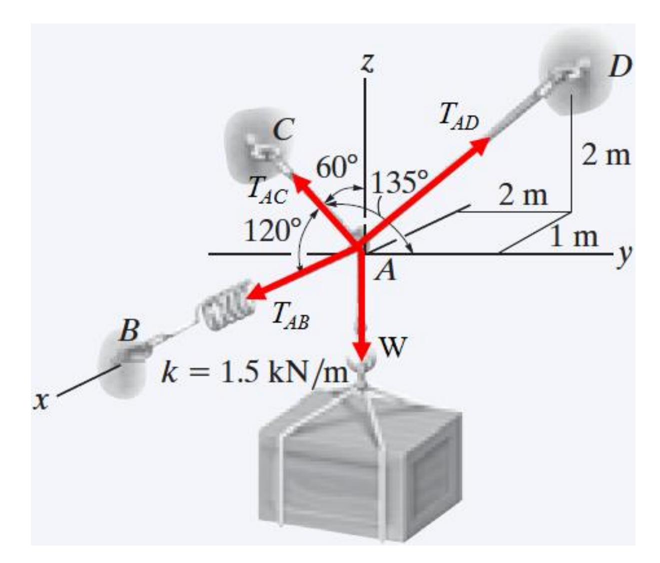
Ejemplo 1.84. Ejemplo 3.8 del Hibbeler. Décima Edición. Página 103. Ejemplo 3.8 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 107.

El cajón de 100 kg mostrado en la figura está soportado por tres cuerdas, una de las cuales se conecta a un resorte. Determine la tensión en las cuerdas *AC* y *AD*, así como el alargamiento del resorte.



Solución.

En la figura siguiente se muestran las fuerzas involucradas:



Condición de equilibrio: $\sum F = 0$

$$T_{AB} + T_{AC} + T_{AD} + W = 0$$

Fuerzas individuales.

$W = (-90\,k)$ lb

Tensión en la cuerda *AB*.

$T_{AB} = \| T_{AB} \| i$

Tensión en la cuerda *AC*.

$T_{AC} = \| T_{AC} \| u_{AC}$

u_{AC}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

u_{AC} = (cos 120°) *i* + (cos 135°) *j* + (cos 60°) *k*

u_{AC} = –0.5 *i* – 0.7071 *j* + 0.5 *k*

$T_{AC} = \| T_{AC} \| (-0.5\,i - 0.7071\,j + 0.5\,k)$

$T_{AC} = -0.5 \| T_{AC} \| i - 0.7071 \| T_{AC} \| j + 0.5 \| T_{AC} \| k$

Tensión en la cuerda AD.

$T_{AD} = \| T_{AD} \| u_{AD}$

u_{AD}: vector unitario de la dirección de la fuerza.

Coordenadas del punto *A*: *A* (0 , 0 , 0)

Coordenadas del punto *D*: *D* (–1 , 2 , 2)

Vector *AD*.

AD = (–1 – 0) *i* + (2 – 0) *j* + (2 – 0) *k*

AD = – *i* + 2 *j* + 2 *k*

Módulo del vector *AD*:

$\| AD \| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}$

$\| AD \| = \sqrt{1 + 4 + 4}$

$\| AD \| = \sqrt{9}$

$\| AD \| = 3$

$u_{AD} = \dfrac{-i + 2\,j + 2\,k}{3}$

$u_{AD} = -0.3333\, i + 0.6667\, j + 0.6667\, k$

$$T_{AD} = \| T_{AD} \| (-0.3333\, i + 0.6667\, j + 0.6667\, k)$$

$$T_{AD} = -0.3333 \| T_{AD} \| j + 0.6667 \| T_{AD} \| j + 0.6667 \| T_{AD} \| k$$

Al sustituir las fuerzas en la condición de equilibrio:

Fuerza	i	j	k
T_{AB} :	$\| T_{AB} \|$		
T_{AC} :	$-0.5000 \| T_{AC} \|$	$-0.7071 \| T_{AC} \|$	$+0.5000 \| T_{AC} \|$
T_{AD} :	$-0.3333 \| T_{AD} \|$	$+0.6667 \| T_{AD} \|$	$+0.6667 \| T_{AD} \|$
W :			-981

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lllcll} \| T_{AB} \| & -0.5000 \| T_{AC} \| & -0.3333 \| T_{AD} \| & = & 0 & (1) \\ & -0.7071 \| T_{AC} \| & +0.6667 \| T_{AD} \| & = & 0 & (2) \\ & 0.5000 \| T_{AC} \| & +0.6667 \| T_{AD} \| & = & 981 & (3) \end{array}$$

De la ecuación (2):

$$0.6667 \| T_{AD} \| = 0.7071 \| T_{AC} \|$$

$$\| T_{AD} \| = \frac{0.7071}{0.6667} \| T_{AC} \|$$

$$\| T_{AD} \| = 1.0606 \| T_{AC} \| \quad (4)$$

Al sustituir la ecuación (4) en la ecuación (3):

$$0.5000 \| T_{AC} \| + 0.6667 (1.0606 \| T_{AC} \|) = 981$$

$$0.5000 \| T_{AC} \| + 0.7071 \| T_{AC} \| = 981$$

$$1.2071 \| T_{AC} \| = 981$$

$$\| T_{AC} \| = \frac{981}{1.2071}$$

$$\| T_{AC} \| = 812.69 \text{ N}$$

De la ecuación (4):

$$\| T_{AD} \| = 1.0606 (812.69 \text{ N})$$

$\|T_{AD}\| = 861.94 \text{ N}$

De la ecuación (1):

$\|T_{AB}\| = 0.5000\|T_{AC}\| + 0.3333\|T_{AD}\|$

$\|T_{AB}\| = 0.5000\,(812.69 \text{ N}) + 0.3333\,(861.94 \text{ N})$

$\|T_{AB}\| = 693.63 \text{ N}$

Alargamiento del resorte.

$\|T_{AB}\| = k\,\Delta l$

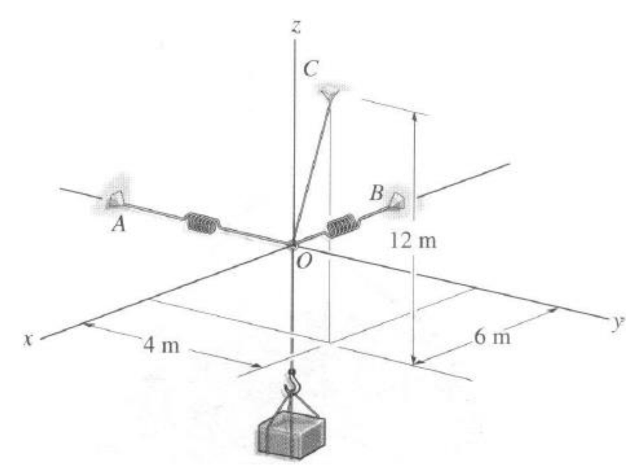
$$\Delta l = \frac{\|T_{AB}\|}{k}$$

$$\Delta l = \frac{693.63 \text{ N}}{1500 \text{ N/m}}$$

$\Delta l = 0.4624 \text{ m}$

Ejemplo 1.85. Problema 3.47 del Hibbeler. Décima Edición. Página 105.

Determine el alargamiento de cada uno de los dos resortes requeridos para mantener el cajón de 20 kg en la posición de equilibrio mostrada. Cada resorte tiene una longitud no alargada de 2 m y rigidez k = 300 N/m.

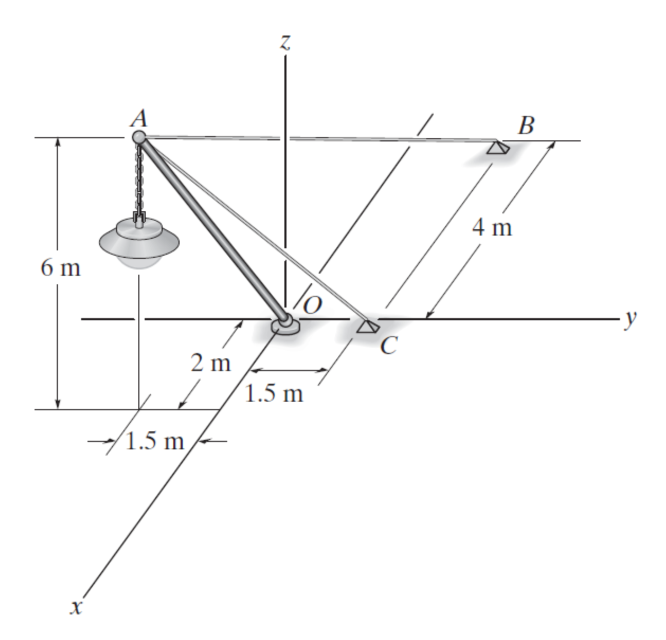


VER SOLUCIÓN.

Sistemas que contienen puntales.

Ejemplo 1.86. Problema 3.50 del Hibbeler. Décima Edición. Página 106. Problema 3.74 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 114.

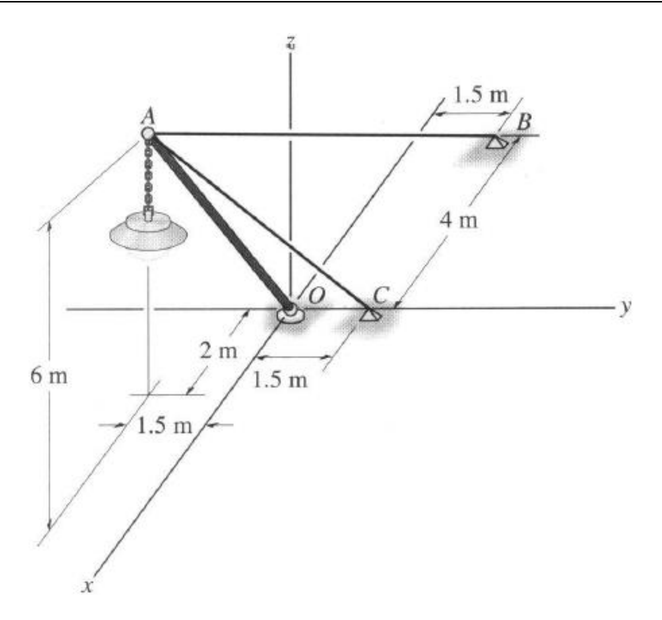
La lámpara tiene una masa de 15 kg y está sostenida por un poste *AO* y por medio de los cables *AB* y *AC*. Si la fuerza en el poste actúa a lo largo de su eje, determine las fuerzas requeridas en *AO*, *AB* y *AC* para mantener el equilibrio.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.87. Problema 3.51 del Hibbeler. Décima Edición. Página 106.

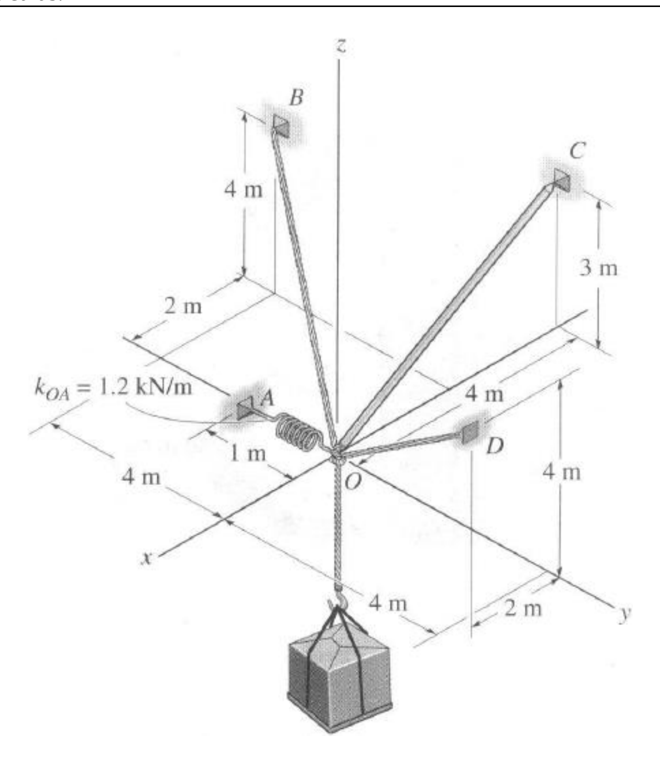
Los cables *AB* y *AC* pueden soportar una tensión máxima de 500 N, y el poste soporta una compresión máxima de 300 N. Determine el peso máximo de una lámpara para que pueda ser sostenida en la posición mostrada. La fuerza presente en el poste actúa a lo largo del eje del poste.



VER SOLUCIÓN.

Ejemplo 1.88. Problema 3.65 del Hibbeler. Décima Edición. Página 109.

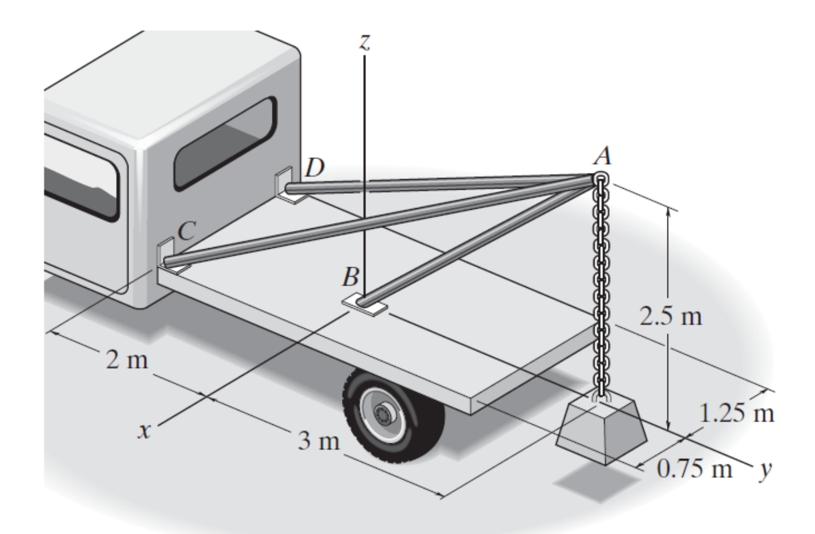
Determine la tensión desarrollada en los cables *OD* y *OB* y en la barra *OC* requerida para sostener la caja de 50 kg. El resorte *OA* tiene una longitud no alargada de 0.8 m y rigidez k_{OA} = 1.2 kN/m. La fuerza presente en la barra actúa a lo largo del eje de ésta.



[VER SOLUCIÓN](#).

Ejemplo 1.89. Problema 3.55 del Hibbeler. Décima Edición. Página 107. Problema 3.53 del Hibbeler. Decimosegunda Edición. Página 110.

Determine la fuerza que actúa a lo largo del eje x de cada uno de los tres puntales necesarios para sostener el bloque de 500 kg.

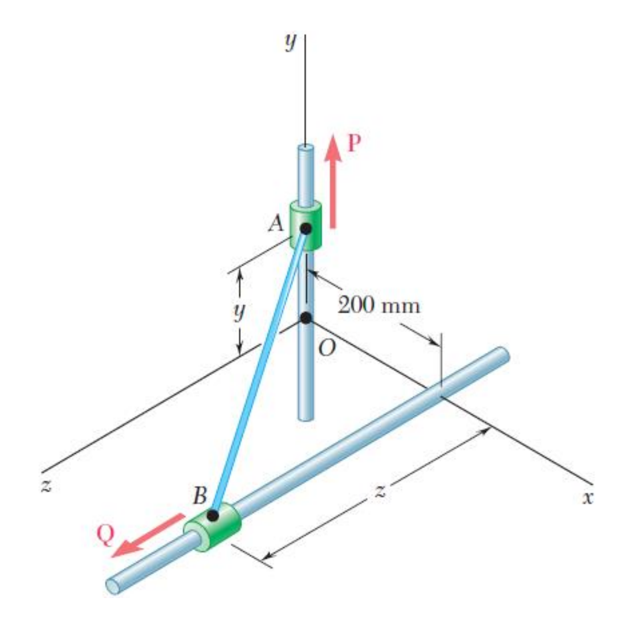


VER SOLUCIÓN.

Sistemas en los cuales hay una fuerza compartida.

Ejemplo 1.90. Problema 2.137 del Beer – Johnston. Novena Edición. Página 69.

Los collarines *A* y *B* se conectan por medio de un alambre de 525 mm de largo y pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las varillas. Si una fuerza $P = (341\ \text{N})\,j$ se aplica al collarín *A*, determine a) la tensión en el alambre cuando $y = 155$ mm y b) la magnitud de la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio del sistema.



VER SOLUCIÓN.

BIBLIOGRAFÍA.

Beer, F., E. R. Johnston, D. F. Mazurek y E. R. Eisenberg, *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*, 8a ed., McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A de C.V, México, 2007.

Beer, F., E. R. Johnston, D. F. Mazurek y E. R. Eisenberg, *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*, 9a ed., McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A de C.V, México, 2010.

Beer, F., E. R. Johnston y D. F. Mazurek, *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*, 10a ed., McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A de C.V, México, 2013.

Hibbeler, R. C, *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*, 10 ed., Pearson Education de México, S.A de C.V. México, 2004.

Hibbeler, R.C, *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*, 11 ed., Pearson Education de México, S.A de C.V. México, 2010.

Meriam, J. L y L. G. Kraige. *Statics*. Seventh Edition. John Wiley & Sons, Inc. Estados Unidos. 2012.